

28

4.10. Формулы Хинчина-Винера

Покажем, что автокорреляционная функция $B(\tau)$ и спектральная интенсивность $J(w)$ связаны однозначно формулами типа интегралов Фурье.

Запишем формулу свертки

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(t + \tau) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}_T(w)|^2 e^{jw\tau} dw. \quad (1)$$

Если все члены уравнения (1) поделим на время наблюдения T , то получим автокорреляционную функцию

$$B(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi |\dot{S}(w)|^2}{T} e^{jw\tau} dw \quad (2)$$

или

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi |\dot{S}(w)|^2}{T} \cos(w\tau) dw, \quad (3)$$

так как интеграл от нечетной функции $\sin w\tau$ по симметричным пределам $(-\infty, +\infty)$ равен нулю. Учитывая формулу (4) предыдущей темы получаем

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} J(w) \cos(w\tau) dw. \quad (4)$$

Получили одну из формул Хинчина-Винера. $B(\tau)$ показывает насколько последующее действие запомнило предыдущее событие (действие). $B(\tau)$ можно определить экспериментально по блок-схемам корреляторов.

Используя идею преобразования Фурье, можно выполнить обратный переход из (4).

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(w)}{2} e^{jw\tau} dw. \quad (5)$$

По обратному преобразованию Фурье

$$\frac{J(w)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-jw\tau} d\tau \quad (6)$$

или

$$J(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau) \cos(w\tau) d\tau. \quad (7)$$

Итого, формула (4) и (7) называются формулами Хинчина-Винера и широко применяются при решении задач статистической радиофизики.

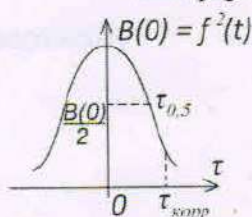
Отметим отдельные следствия:

1. $B(\tau) = B(-\tau)$, (8) так как $J(w)$ и $\cos(w\tau)$ являются четными функциями по частоте.
2. Вывод формулы (7) показывает, что $J(w)$ и $B(\tau)$ есть трансформанты Фурье.
3. Чем более широкополосен процесс, тем время корреляции меньше, и наоборот.

$$\Delta w \cdot \tau_{\text{корр}} \approx \text{const.} \quad (9)$$

$$4. B(0) = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \overline{f^2(t)} = \int_0^\infty J(w) dw \quad (10)$$

См. формулы (2), (4)



Чем уже $B(\tau)$, тем процесс более хаотичен (малосвязанность). Для шумов $\tau_{\text{корр}}$ может стремиться к 0.

Автокорреляционная функция показывает память случайного стационарного процесса о самой себе при относительных смещениях по времени τ . Чем меньше $\tau_{0.5}$, тем хуже память процесса.

29

4.11. Идея обнаружения сигнала на фоне шумов, используя автокорреляционную функцию

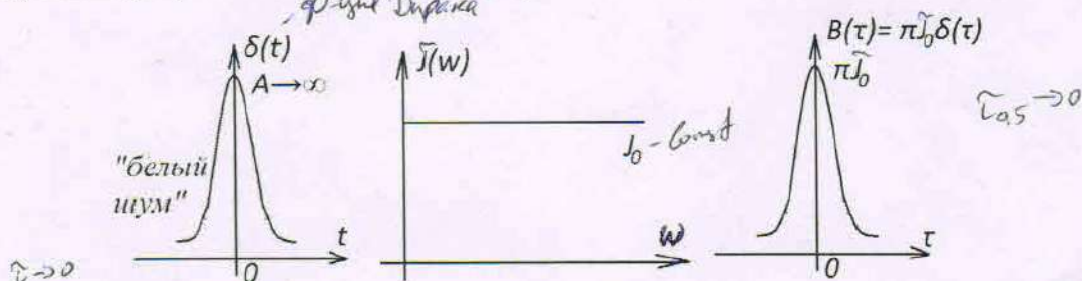
1. Шум можно моделировать δ -функцией, ширина спектра которой большая, (практическая независимость от частоты ω). Это значит, что и спектральная интенсивность не будет зависеть от ω , а автокорреляционная функция будет пропорциональна $\delta(\tau)$.

$$B(\tau) = \int_0^\infty J(w) \cdot \cos(w\tau) dw \cong J_0 \int_0^\infty \cos(w\tau) dw = \pi J_0 \delta(\tau), \quad (1)$$

так как при рассмотрении темы белого шума записывали формулу

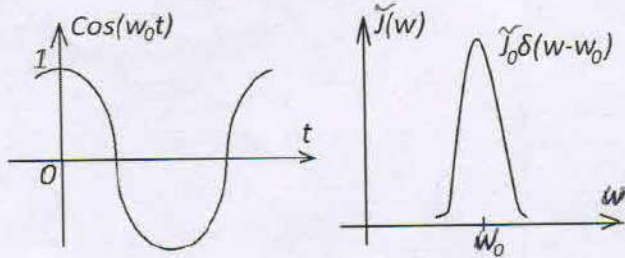
$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \cos(wt) dw. \quad (2)$$

Полученные результаты представили в графическом виде



Малая ширина функции $B(\tau)$ свидетельствует о «хаосе», т.е. почти отсутствии «памяти» у белого шума. *Белый шум имеет малую память, т.е. $\tau_{0.5}$ очень мало*

2. В качестве сигнала берем гармоническую функцию (монохроматический сигнал)



$J(w)$ - спектр. и интенсивность
 $B(\tau)$ - автокорр. функ.

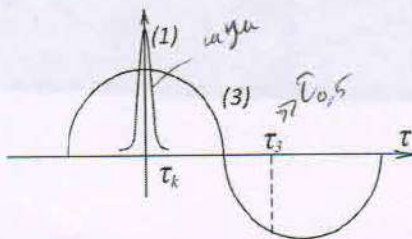
Реальная спектральная интенсивность.

По интегралу Фурье «идеальной» косинусоиде соответствует линейчатый спектр на частоте w_0 , т.е. линия и по $J(w)$. На графике мы нарисовали реальную картину $J(w)$ с учетом нестабильности частоты косинусоидальной функции.

По формуле Хинчина-Винера

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} J_0 \cdot \delta(w - w_0) \cos(w\tau) dw = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} J_0 \cdot \delta(w - w_0) \cos(w\tau) dw = \\ = \frac{1}{2} J_0 \cos(w_0 \tau). \quad (3)$$

Получается, что косинусоидальному процессу по t соответствует косинусоидальная



автокорреляционная функция по τ . Разница формул (1) и (3) позволяет четко обнаружить сигнал на фоне белого шума (или, говорят, на фоне гауссовского шума). На основе (1) и (3) построим совмещенный общий график.

Если τ_z выберем больше корреляционного времени белого шума, то наверняка попадем на автокорреляционную функцию сигнала (косинусоиды).

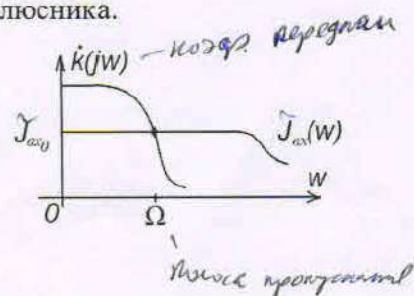
Важно см. терм. разб.

30 Тема: 4.12. Идея оценки средней мощности шумов на выходе линейного четырехполюсника

В реальных 4-х полюсниках полоса пропускания Ω коэффициента передачи $k(jw)$ обычно бывает значительно меньше ширины спектральной интенсивности шумов на входе четырехполюсника $J_{вх}(w)$. Это позволяет оценить мощность шума (среднюю интенсивность шума) $\overline{f_{вх}^2(t)}$ на выходе четырехполюсника.

$$\frac{\overline{f_{вх}^2(t)}}{x^2(t)} = \frac{\overline{f_{вх}^2(t)}}{1} = \frac{\overline{f_{вх}^2(t)}}{y^2(t)} = ?$$

Анализ 4-х полюсника



Мощность шума выразим через автокорреляционную функцию $B(\tau)$ и спектральную интенсивность $J(w)$.

$$B(0) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t + \tau) dt = \overline{f^2(t)}. \quad (1)$$

С другой стороны, по формуле Хинчина-Винера:

$$B(0) = \int_0^\infty J(w) dw, \quad (2)$$

так как $\cos(w\tau)$ при $\tau = 0$ равняется единице.

Приравняв правые части уравнений (1) и (2), можно записать

$$\overline{f_{\text{вх}}^2(t)} = \int_0^\infty \frac{4\pi |\dot{S}_{\text{вх}}(w)|^2}{T} dw \quad (3)$$

$$\text{и } \overline{f_{\text{вых}}^2(t)} = \int_0^\infty \frac{4\pi |\dot{S}_{\text{вых}}(w)|^2}{T} dw. \quad (4)$$

Для линейного четырехполосника спектр выходного сигнала:

$$\dot{S}_{\text{вых}}(w) = k(jw) \dot{S}_{\text{вх}}(w). \quad (5)$$

(Второй этап расчета линейных искажений).

Тогда мощность шума на выходе через формулы (4) и (5) можно записать так

$$\overline{f_{\text{вых}}^2(t)} = \int_0^\infty \frac{4\pi |\dot{S}_{\text{вх}}(w)|^2 |k(jw)|^2}{T} dw. \quad (6)$$

Используя спектральную интенсивность входа

$$\overline{f_{\text{вх}}^2(t)} \approx J_{\text{вх}0} \int_0^\infty |k(jw)|^2 dw. \quad (7)$$

С учетом реальной полосы пропускания четырехполосника

$$\overline{f_{\text{вых}}^2(t)} \approx J_{\text{вх}0} \int_0^\Omega |k(jw)|^2 dw \quad (8)$$

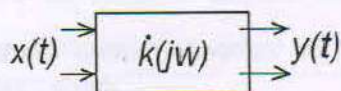
Мощность шума на выходе (отклик) повторяет с точностью до постоянного множителя форму квадрата модуля комплексной частотной характеристики линейной системы.

$\dot{S}_{\text{вх}}(w)$ - для гаусового шума или т.е. белым, т.е. покрывает все диапазоны частот. вывод: для теоретического

4.13. Примеры отклика линейных систем на воздействие случайных сигналов

См. дополнительно книгу: А.С. Чумаков. Основы статистической радиотехники:

учебное пособие. - Томск: изд. ТУСУР, 2003. - 394 с.



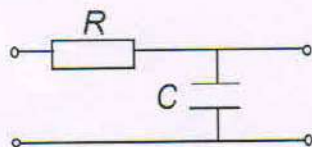
Наиболее удобными характеристиками для описания отклика являются:

1. Корреляционная функция $B(\tau)$.
2. Спектральная плотность мощности (спектральная интенсивность) $J(w)$.
3. Среднее квадратичное значение $M\{y^2(t)\}$

Как показывает формула (8) предыдущей темы, расчеты отклика $\overline{f_{\text{вых}}^2(t)} = \overline{y^2(t)}$ следует начинать с определения модуля коэффициента передачи четырехполюсника.

Пример 1.

Дано:



$$|k(j\omega)|^2 - ?$$

1) $k(j\omega) = \frac{Z_{\text{вых}}(\omega)}{Z_{\text{вх}}(\omega)} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega T}$ (1), где $T = RC$ является характерным временем цепочки

2) Комплексное выражение $k(j\omega)$ запишем в удобном виде (раздельно активную и мнимые части):

$$k(j\omega) = \frac{1}{(1 - j\omega T)} \cdot \frac{(1 + j\omega T)}{(1 + j\omega T)} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}. \quad (2)$$

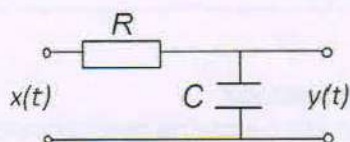
Для решения задач надо бывает найти модуль коэффициента передачи

$$|k(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 + \frac{\omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2}} \quad (3)$$

$$|k(j\omega)|^2 = \frac{1}{(1 + \omega^2 T^2)^2} + \frac{\omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2} = \frac{1 + \omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2}. \quad (4)$$

Пример 2.

Дан низкочастотный RC фильтр первого порядка, на вход которого поступает белый шум со спектром $\dot{S}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}$. Найти спектральную плотность мощности отклика на выходе фильтра $J_y(\omega)$.



Пользуемся формулой мощности шумов на выходе линейного четырехполюсника.

$$J_y(\omega) = J_x(\omega) |k(j\omega)|^2. \quad (5)$$

1) Ищем спектральную плотность мощности белого шума на входе

$$J_x(\omega) = \frac{4\pi |\dot{S}_x(\omega)|^2}{T} = \frac{1}{\pi T}. \quad (6)$$

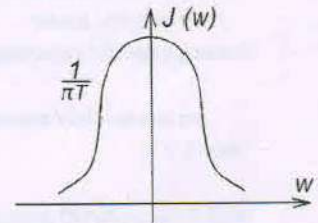
$$|\dot{S}_x(\omega)| \cong \frac{1}{2\pi} - \text{для белого шума.}$$

2) Квадрат модуля низкочастотного фильтра первого порядка нашли в примере №1.

$$|k(jw)|^2 = \frac{1}{1+w^2T^2}. \quad (7)$$

Итого, спектральная плотность мощности на выходе фильтра равняется

$$J_y(w) = \frac{1}{\pi T(1+w^2T^2)}. \quad (7)$$



Получили что-то похожее на колокол в зависимости от круговой частоты w .

Пример 3.

Дан низкочастотный фильтр первого порядка с ограниченным по полосе $(0 \div w)$ белым шумом на входе. Оценить величину среднего квадрата отклика $M(y^2)$.

Как было показано раньше автокорреляционную функцию $B(0)$ при $\tau = 0$ можно записать в виде 2-х формул.

$$B(0) = \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt = \overline{y^2(t)} = M\{y^2(t)\}. \quad (8)$$

С другой стороны, по формуле Хинчина-Винера $B(\tau) = \int_0^\infty J_y(w) \cos(w\tau) dw$. (9)

При $\tau = 0$ $B(0) = \int_0^\infty J_y(w) dw$. (10)

Приравнявая правые части, получаем формулу для решения задачи.

$$M\{y^2(t)\} = \int_0^\infty J_y(w) dw = \int_0^{w_c} J_x(w) |k(jw)|^2 dw \cong J_{x_0} \int_0^{w_c} \frac{1}{1+(wT)^2} dw =$$

$$J_{x_0} \frac{1}{T} \int_0^{w_c T} \frac{1}{1+w_1^2} dw_1 = J_{x_0} \frac{1}{T} \arctg w_1 \Big|_0^{w_c T} = J_{x_0} \frac{1}{T} \arctg(w_c T). \quad (11)$$

Пример 4.

Дан низкочастотный фильтр первого порядка, но с чисто белым шумом на входе для всех частот. Найти отклик линейной системы в виде среднего квадратичного значения $M\{y^2(t)\}$.

Идея расчета такая же, как в примере №3.

$$M\{y^2(t)\} = \int_0^\infty \frac{J_0}{1+(wT)^2} dw = \frac{1}{T} \int_0^{Tw} \frac{J_0}{1+w_1^2} dw = \frac{J_0}{T} \int_0^\infty \frac{1}{1+w_1^2} dw = \frac{J_0}{T} \arctg \infty = \frac{J_0}{T} \frac{\pi}{2}.$$