

Радиофизические методы для инженеров

А.Г. Корякин, М.В. Ноговицына

Г. Якутск, 2017 г.

Оглавление

Введение	5
1. Спектральный метод анализа (переменные – время t и круговая частота ω)	6
1.1. Разложение в ряд Фурье периодической последовательности видеоимпульсов.....	6
1.2. Коэффициент разложения Фурье.....	6
1.3. Условия применимости ряда Фурье.....	7
1.4. Частотный (гармонический) спектр импульсного сигнала.....	8
1.5. Спектральная функция (комплексная амплитуда спектральной функции) периодической последовательности видеоимпульсов.....	8
1.6. Спектральная плотность одиночного импульса (представление одного импульса интегралом Фурье)	9
1.7. Амплитудный и фазовый спектры	10
1.8. Пример определения сплошного спектра $\dot{S}(\omega)$	11
1.9. Пример определения линейчатого спектра $\dot{S}_k(k\Omega_i)$ и коэффициентов Фурье.....	11
1.10. Определение спектров по известным функциям времени (на формулу 21)... ..	12
1.11. Связь спектра одиночного сигнала и периодической последовательности видеоимпульсов.....	14
1.12. Перенос спектра в область высоких частот	15
1.13. Передача непрерывных сообщений с помощью импульсных сигналов	16
1.14. О связи коэффициентов разложения ограниченных спектров в дискретных значений непрерывной информации, взятых через $\Delta t = \frac{\pi}{\Omega}$	17
1.15. Распределение Котельникова	18
1.16. Спектральный метод анализа линейных искажений	19
1.17. Пример расчета линейных искажений	20
1.18. Контрольная работа №1. Спектральный метод анализа	23
1.19. Контрольная работа №2 по импульсной технике.....	30
2. Операционный метод анализа импульсных сигналов (метод преобразования Лапласа)	38
2.1. Метод решения задач с использованием преобразования Лапласа	39
2.2. Определение изображений $f(p)$ по известным оригиналам $f(t)$ – примеры на прямое преобразование Лапласа	40
2.3. Контрольная работа №1. Преобразование Лапласа	41

2.4.	Контрольная работа №2. Преобразование Лапласа	46
2.5.	Контрольная работа №3	46
2.6.	Контрольная работа №4. Передаточная функция, вычеты	48
2.7.	Контрольная работа №5. Переход от $K(p)$ и $h(t)$, $A(w)$, $\varphi(w)$ на примерах А-, П-, И- звеньев	48
2.8.	Контрольная работа №6. Уравнения модели, дифференциальные уравнения, коэффициент передачи и передаточная функция разомкнутых и замкнутых систем	49
3.	О системах автоматического регулирования (САР).....	51
3.1.	Применение операционного исчисления и теории функций комплексного переменного.....	51
3.2.	Общая схема решения задач методом Лапласа	52
3.3.	Методы расчета систем автоматического регулирования с использованием преобразования Лапласа.....	52
3.4.	Правила дифференцирования и интегрирования в области изображений	54
3.5.	Основные понятия систем автоматического регулирования	56
3.6.	Функциональная схема СА в общем виде	56
3.7.	Принципиальная структурная схема систем автоматического регулирования.....	58
3.8.	Математическая постановка основной задачи теории регулирования	59
3.9.	Замечания о нелинейности систем автоматического регулирования	60
3.10.	Пример аналитического подхода к изучению динамики объекта	62
3.11.	Идея рассмотрения динамики встречно-параллельного соединения систем автоматического регулирования	63
3.12.	Пример расчета систем автоматического регулирования с операционными усилителями	64
4.	О статистической радиофизике	66
4.1.	Некоторые понятия теории вероятности	66
4.2.	Случайные события	67
4.3.	Методика оценки шумов	70
4.4.	Биноминальное распределение (распределение Бернулли)	70
4.5.	Определение средних значений для распределения Бернулли	71
4.6.	Определение флуктуаций (шумов, для распределения Бернулли)	72
4.7.	Закон равномерного распределения по степеням свободы	74
4.8.	Примеры на закон равномерного распределения по степеням свободы	75

4.9.	Гармонический анализ стационарных случайных величин	76
4.10.	Формулы Хинчина-Винера	77
4.11.	Идея обнаружения сигнала на фоне шумов, используя автокорреляционную функцию	78
4.12.	Идея оценки средней мощности шумов на выходе линейного четырехполюсника	79
4.13.	Примеры отклика линейных систем на воздействие случайных сигналов ...	80
4.14.	Об использовании формулы Найквиста для пассивных цепей	82
4.15.	Применение обобщенной формулы Найквиста и расчета антенн	83
4.16.	О марковских процессах	85
4.17.	Автокорреляционная функция тепловых шумов сопротивления на сверхвысоких частотах	85
4.18.	Отношение правдоподобия	87
4.19.	Идея обнаружения очень слабого сигнала на фоне гауссовского шума	89
4.20.	О корректности выборок при ограниченном времени наблюдения	90
4.21.	Экспериментальное обнаружение сигнала на фоне гауссовского шума при ограниченном времени наблюдения	91
4.22.	Расчет вероятности ложной тревоги	92
4.23.	О путях уменьшения вероятности ложной тревоги	93
	Литература	94

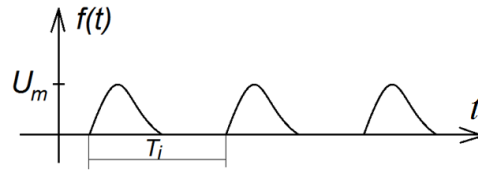
Введение

В последние годы развитие радиофизики смещается в сторону статистической радиофизики, поэтому требуется квалифицированно рассчитывать различные шумы в радиоэлектронных системах. Это невозможно без правильного подбора функций распределения случайных величин. В пособии кратко описывается спектральный метод анализа. Также для расчетов систем автоматического регулирования инженерам необходимо освоить операционный метод (преобразование Лапласа). Идея согласования каскадов различных устройств по мощности получены из формул тепловых шумов. Даны методы обнаружения полезного сигнала на фоне шумов. После каждой главы приводятся проверочные тесты и контрольные работы.

Поскольку пособие предназначено для связи теории методов радиофизики с практикой, оно будет полезно не только радиоинженерам, но и для инженеров широкого профиля.

1. Спектральный метод анализа (переменные – время t и круговая частота ω)

1.1. Разложение в ряд Фурье периодической последовательности видеоимпульсов



$$f(t) = U_m f(t \pm nT_i), \quad (1)$$

$f(t)$ – функция, определяющая форму и длительность видеоимпульса

T_i – период повторения видеоимпульсов.

$$\Omega_i = \frac{2\pi}{T_i}, \quad (2)$$

Ω_i – круговая частота повторения видеоимпульсов.

Для простоты будем считать $U_m = 1$.

Формула (1) разлагается в ряд Фурье

$$f(t) = f(t \pm nT_i) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\Omega_i t) + b_k \sin(k\Omega_i t)], \quad (3)$$

$$\text{где } a_k = \frac{2}{T_i} \int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} f(t) \cos(k\Omega_i t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T_i} \int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} f(t) \sin(k\Omega_i t) dt. \quad (4)$$

n – число импульсов, k – число гармоник.

Формула (3) – одна из основных формул математического анализа.

1.2. Коэффициент разложения Фурье

Вычисления упрощаются в комплексной форме:

$$a_k \cos(k\Omega_i t) + b_k \sin(k\Omega_i t) = c_k \cos(k\Omega_i t + \varphi_k), \quad (5)$$

где φ_k – начальная фаза k – й гармоники.

Раскрывая скобки в правой части этого выражения и приравнявая коэффициенты при синусах и косинусах, получаем

$$c_k \cos(k\Omega_i t + \varphi_k) = c_k \cos(k\Omega_i t) \cos \varphi_k - c_k \sin(k\Omega_i t) \sin \varphi_k. \quad (6)$$

Сравнивая левую часть (5) и правую часть (6), можно написать

$$a_k = c_k \cos \varphi_k; \quad b_k = c_k \sin \varphi_k. \quad (7), (8)$$

Следовательно,

$$a_k^2 = c_k^2 \cos^2 \varphi_k \quad \text{и} \quad b_k^2 = c_k^2 \sin^2 \varphi_k. \quad (9), (10)$$

$$\text{Сложение (7) и (8) дает } c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}. \quad (11)$$

Если уравнение (8) поделим на (7), то получим

$$\frac{a_k}{b_k} = -\operatorname{tg} \varphi_k \quad \text{или} \quad \varphi_k = -\operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}. \quad (12)$$

(11) и (12) дает коэффициенты Фурье.

Коэффициенты Фурье c_k можно найти и через $f(t)$, не зная a_k и b_k :

$$\begin{aligned} \dot{c}_k &= c_k e^{j\varphi_k} = c_k (\cos\varphi_k + j\sin\varphi_k) = a_k - jb_k = \frac{2}{T_i} \int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} f(t) \cos(k\Omega_i t) dt - \\ & j \frac{2}{T_i} \int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} f(t) \sin(k\Omega_i t) dt = \frac{2}{T_i} \int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} f(t) e^{-jk\Omega_i t} dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Пределы интегрирования можно записать по другому:

$$\dot{c}_k = \frac{2}{T_i} \int_0^{T_i} f(t) e^{-jk\Omega_i t} dt = \frac{\Omega_i}{\pi} \int_0^{T_i} f(t) e^{-jk\Omega_i t} dt. \quad (14)$$

Обратим внимание, что коэффициенты Фурье $\dot{c}_k$ прямо пропорциональны частоте повторения видеоимпульсов. Точка сверху обозначает возможную комплексность амплитуды.

Уравнение (3), т.е. ряд Фурье можно записать через коэффициенты Фурье $\dot{c}_k$

$$f(t) \cong \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{c}_k e^{jk\Omega_i t}. \quad (15)$$

Рядом Фурье называется разложение периодического колебания $f(t)$ в ряд $\sum_k \frac{\dot{c}_k}{2} e^{-jk\Omega_i t}$ по системе тригонометрических функций.

1.3. Условия применимости ряда Фурье

Выяснение условий, при которых ряд $\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{c}_k e^{jk\Omega_i t}$ сходится во всех или почти во всех точках к заданной функции $f(t)$, является важной задачей математического анализа.

Условие Дирихле: Для всякого колебания, описываемого функцией, имеющей конечное число точек разрыва первого рода, можно построить ряд по заданной системе ортогональных функций вида $f(t) \cong \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{c}_k e^{jk\Omega_i t}$, если существуют интегралы $\int_{t_1}^{t_2} |f(t)| dt$ и $\int_{t_1}^{t_2} |f'(t)| dt$.

В радиотехнике это обычно выполняется. Причем, для большинства задач радиотехники достаточно сходимости в среднем, которая всегда имеет место для радиотехнических колебаний конечной энергии.

[Филиппов и Зиновьев]: «Если совокупность функций $e^{j0\Omega_i t}, e^{j1\Omega_i t}, \dots, e^{jn\Omega_i t}$ удовлетворяет на отрезке $(t_1 t_2)$ условиям

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{jm\Omega_i t} e^{jk\Omega_i t} dt = 0 \text{ и } \overline{e^{jm\Omega_i t} e^{jk\Omega_i t}} = 0, \quad (16)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots, n$; $k = 0, 1, 2, \dots, n$ и $m \neq k$, то она называется ортогональной на отрезке $(t_1 t_2)$ функций.

Если при этом также $\overline{(e^{jm\Omega_i t})^2} = N_m = 1$, то система называется ортонормированной (ортонормальной). Если $N_m \neq 1$, то умножив $e^{jm\Omega_i t}$ на $\frac{1}{\sqrt{N_m}}$ можно ее нормировать.

1.4. Частотный (гармонический) спектр импульсного сигнала

Если импульсный сигнал τ строго определен на нулевом уровне, то уравнение (14) можно записать так

$$\dot{c}_k = \frac{\Omega_i}{\pi} \int_0^\tau f(t) e^{-jk\Omega_i t} dt. \quad (17)$$

Условно можно выделить 3 параметра (чисел):

1) Угловая частота каждой k -й гармоники

$$\omega_k = \frac{2\pi}{T_i} k = \Omega_i k. \quad (18)$$

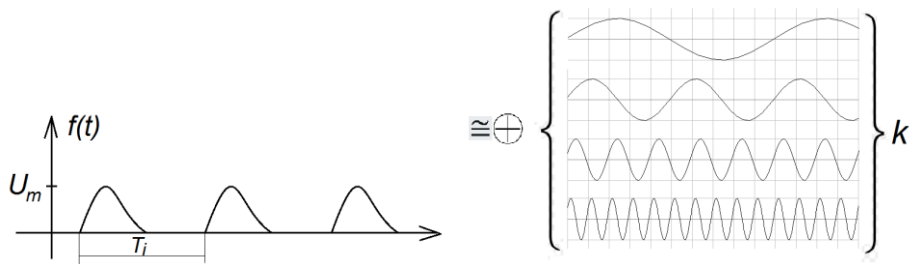
2) Так левая часть формулы (17) является комплексной функцией, то ее можно разложить на 2 части

$$c_k = |\dot{c}_k| - \text{амплитуда}, \quad (19)$$

$$\varphi_k = \arg \dot{c}_k - \text{фаза}. \quad (20)$$

Совокупность этих 3-х чисел принято называть гармоническим спектром $(\omega_k, |\dot{c}_k|, \varphi_k)$.

Частотным спектром импульсного сигнала называется совокупность гармонических функций времени (напряжений и токов), сумма которых дает исходный сигнал $f(t)$.



Справа стоит сумма числа синусоид или косинусоид с различными амплитудами (c_k) , частотами (ω_k) , фазами (φ_k) . Нахождение частотного спектра заключается в определении амплитуд, частот и фаз его гармоник k .

1.5. Спектральная функция (комплексная амплитуда спектральной функции) периодической последовательности видеоимпульсов

Как видно из формулы (17) $\dot{c}_k = \frac{\Omega_i}{\pi} \int_0^\tau f(t) e^{-jk\Omega_i t} dt$, модуль комплексной амплитуды зависит от частоты повторения Ω_i , что не всегда удобно. В осциллографах

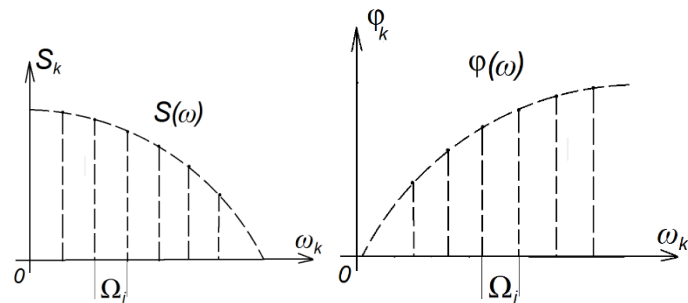
вращая частоту повторения Ω_i получаем новое выражение, что вносит неопределенность при определении спектров.

Для исключения этой зависимости комплексную амплитуду коэффициентов разложения Фурье $\dot{c}_k$ относят к величине $\frac{\Omega_i}{\pi}$, пропорциональной частотному интервалу Ω_i между соседними гармониками спектра.

$$\dot{S}_k = \frac{\dot{c}_k}{\frac{\Omega_i}{\pi}} = \int_0^{T_i} f(t) e^{-jk\Omega_i t} dt. \quad (20)$$

При таком рассмотрении вид огибающей спектральной картины в осциллографе не зависит от частоты повторения видеоимпульсов Ω_i . Спектр становится линейчатым (расстояния между вертикальными линиями равняются Ω_i).

Для реальных сигналов функции c_k и φ_k могут иметь такой вид



1.6. Спектральная плотность одиночного импульса (представление одного импульса интегралами Фурье)

Вместо вычисления значения S_k в дискретных точках $\omega_k = \Omega_i k$ по оси частот удобно определить непрерывную огибающую спектральной функции в зависимости от текущего значения частоты ω .

$$\text{Из формулы (20)} \quad \dot{S}_k(\Omega_i k) = \dot{c}_k \frac{\pi}{\Omega_i}. \quad (21)$$

Если берем 1 импульс, то это соответствует $T_i \rightarrow \infty$. Значит, в вышеуказанных рисунках для одного импульса как бы точки сливаются. Импульс по времени один, поэтому пределы интегрирования могут брать бесконечными.

Формула (20) примет другой вид ($k\Omega_i \rightarrow \omega$) (Формулы Фурье):

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (21)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} dt. \quad (22)$$

Равнозначные формулы. Информации

можно изучать как по времени t , так и по частоте ω .

В формуле (21) при $\tau \sim 0$ $e^{j\omega t} \sim 1$, т.е. в правой части интеграла исчезает частотная зависимость. Это физически объясняет, что чем короче импульс по времени, тем шире спектр.

[Зиновьев и Филиппов]: Можно показать как получается формула (22):

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{c}_k e^{jk\Omega_i t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T_i} \dot{S}(k\Omega_i) e^{jk\Omega_i t}.$$

$$\text{Учтем, что } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \dot{S}(\omega_k) e^{j\omega_k t} (\omega_{k+1} - \omega_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

$$\text{Итак, } f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Эти 2 формулы (21, 22) являются основными формулами спектрального метода анализа импульсных сигналов. Из рис. 3 остаются только огибающие.

1.7. Методика экспериментального применения спектрального метода анализа

1. Берут последовательность видеоимпульсов по t .
2. По формуле (20) определяют $\dot{S}(k\Omega_i)$ – линейчатый спектр последовательности видеоимпульсов (или измеряют специальным прибором – спектрографом).
3. По вершинам рис.3 S_k строят огибающую $S(\omega)$.
4. По вершинам рис.3 φ_k строят огибающую $\varphi(\omega)$.

Последние 2 величины дают сплошной спектр одиночного импульса по времени.

1.7. Амплитудный и фазовый спектры

Спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$ является комплексной величиной, поэтому ее можно представить в виде

$$\dot{S}(\omega) = S(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (23)$$

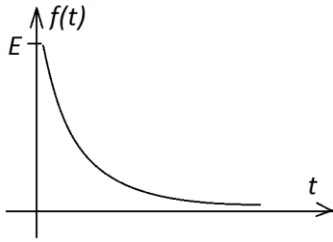
$S(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ – модуль спектральной функции, характеризующий соотношение амплитуд гармоник спектра. $S(\omega)$ называется *амплитудным спектром* сигнала.

$\varphi(\omega) = \arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$ – характеризует фазовые соотношения между гармониками спектра. $\varphi(\omega)$ называется *фазовым спектром* сигнала.

Из выражения (20) видно, что $\dot{S}(\omega)$ определяется только формой импульса $f(t)$ и его длительностью τ и не зависит от частоты повторения Ω_i , меняется лишь «набивка» спектра, огибающая же спектра, как амплитудного $S(\omega)$, так и фазового $\varphi(\omega)$ остаются неизменными.

1.8. Пример определения сплошного спектра $\dot{S}(\omega)$

Дано:



$$f(t) = Ee^{-\alpha t}, t \geq 0$$

$$0, \quad \text{при } t < 0.$$

α – постоянный коэффициент затухания. Например, $\alpha = \frac{1}{RC}$, где R – сопротивление, C – емкость.

Применяем один из основных интегралов Фурье спектрального метода анализа.

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} E e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} E e^{-(\alpha+j\omega)t} dt = E \frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{E}{\alpha+j\omega}. \quad (24) \end{aligned}$$

$$S(\omega) = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega}{\alpha}}.$$

1.9. Пример определения линейчатого спектра $\dot{S}_k(k\Omega_i)$ и коэффициентов Фурье

1. Линейчатый спектр определяется просто – в формуле (24) обычная непрерывная круговая частота ω заменяется дискретными частотами

$$\omega = k\Omega_i. \quad (25)$$

$$\text{Итого, линейчатый спектр } \dot{S}_k(k\Omega_i) = \frac{E}{\alpha+jk\Omega_i}.$$

$$\text{Амплитудный спектр } S_k = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + k^2\Omega_i^2}}, \quad (26)$$

$$\text{так как } \dot{S}_k(k\Omega_i) = \frac{E}{\alpha+jk\Omega_i} = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + k^2\Omega_i^2}} e^{-j \arctg \frac{k\Omega_i}{\alpha}}. \quad (27)$$

2. Из формулы (21) известно, что коэффициенты Фурье

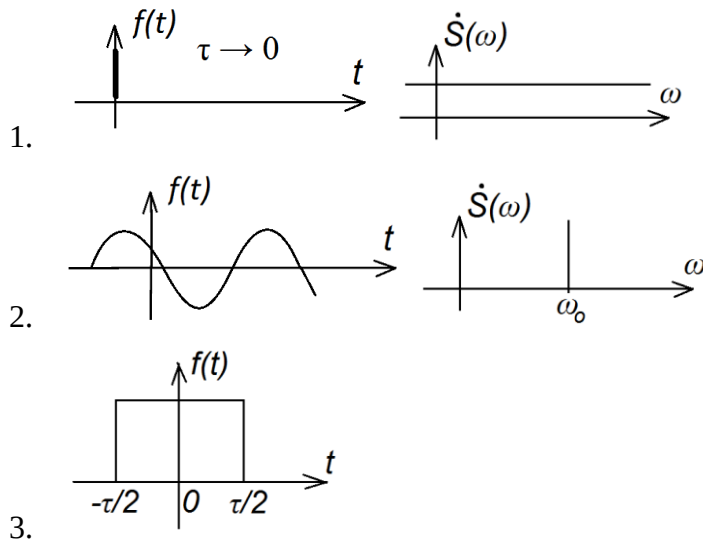
$$\dot{C}_k = \frac{\Omega_i}{\pi} \dot{S}_k(k\Omega_i). \quad (28)$$

Значит, коэффициенты Фурье

$$\dot{C}_k = \frac{\Omega_i}{\pi} \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + k^2\Omega_i^2}} e^{-j \arctg \frac{k\Omega_i}{\alpha}}. \quad (29)$$

1.10. Определение спектров по известным функциям времени (на формулу 21)

Дается информация (функция) $f(t)$, найти $S(\omega)$.



$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < -\frac{\tau}{2} \\ A, & \text{при } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \text{при } t > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad S(\omega) - ? \quad (1)$$

Ответ найдем двумя методами интегрирования

$$1) \quad S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos(\omega t) dt - jA \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \sin(\omega t) dt = A \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos(\omega t) dt, \quad (2)$$

так как интеграл от нечетной функции по «симметричным» пределам равен 0.

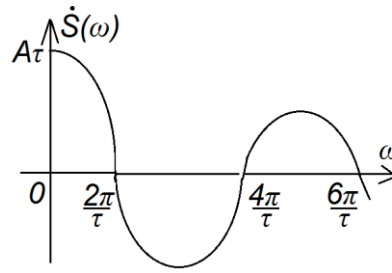
$$\text{Значит, спектр } S(\omega) = A \left. \frac{\sin(\frac{\omega t}{2})}{\omega} \right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = 2A \sin\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \frac{1}{\omega} = (A\tau) \frac{\sin(\frac{\omega \tau}{2})}{\frac{\omega \tau}{2}}. \quad (3)$$

Получили сплошной спектр одиночного импульса. Обратим внимание, что площадь импульса по времени играет роль амплитуды спектра (см. формулу (3)).

$$2) \quad S(\omega) = A \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = A \left. \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = -\frac{A}{j\omega} \left(e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau}{2}} \right) = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) =$$

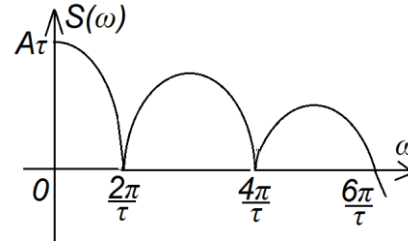
$$3) \quad = (A\tau) \frac{\sin(\frac{\omega \tau}{2})}{\frac{\omega \tau}{2}}.$$

Результат расчета спектра давайте представим в виде графика.



$\dot{S}(\omega)$ содержит и амплитудный и фазовый спектр, поэтому имеет и отрицательное значение:

$$\dot{S}(\omega) = S(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}. \quad (4)$$



Обратим внимание, что чем меньше длительность импульса τ , тем шире спектр по частоте.

Это уже амплитудный спектр прямоугольного импульса по времени.

4. Определим спектр импульса в виде колокола по времени:

$$f(t) = e^{-\beta^2 t^2}. \quad \dot{S}(\omega) = ? \quad \beta = \text{const}. \quad (5)$$

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\beta^2 t^2 + j\omega t)} dt. \quad (6)$$

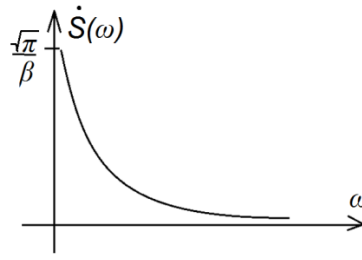
В степени время имеет четное и нечетное выражение, что усложняет интегрирование. Удобно воспользоваться идеей квадрата двух чисел.

$$\text{Например, } (t + a)^2 = t^2 + 2at + a^2. \quad (7)$$

В правой части (7) время присутствует в двух местах, тогда как слева входит только в одном месте. Осуществим эту идею, чтобы быстрее проинтегрировать.

$$\beta^2 t^2 + j\omega t = (\beta t)^2 + 2 \left(j \frac{\omega}{2\beta} \right) (\beta t) + \left(\frac{j\omega}{2\beta} \right)^2 - \left(\frac{j\omega}{2\beta} \right)^2,$$

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\left(\beta t + \frac{j\omega}{2\beta} \right)^2 + \frac{\omega^2}{4\beta^2} \right]} dt = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\beta t + \frac{j\omega}{2\beta} \right)^2} d(\beta t) = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{2e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}. \end{aligned}$$



Если коэффициент затухания β увеличивается, то спектр колокола расширяется. При этом мы воспользовались табличными интегралами математического анализа

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg } x. \quad (8)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{E^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{E^2}{\alpha\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)} d\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \frac{E^2}{\alpha\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{E^2}{\alpha\pi} \text{arctg } \frac{\omega}{\alpha} \Big|_0^\infty = \frac{E^2}{\alpha^2}. \quad (9)$$

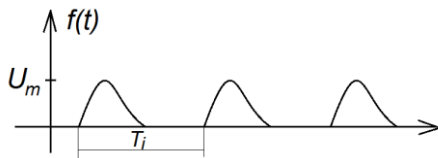
Приближение по энергиям можно провести по формуле $\varepsilon W = \frac{1}{\pi} \int_0^\Omega |S(\omega)|^2 d\omega$. Например, зная ε , W , $S(\omega)$ можно определить Ω .

Как провести приближение по формам сигнала? Общих критериев, к сожалению, нет. В радиолокации, телевидении и т.д. берутся разные критерии.

1.11. Связь спектра одиночного сигнала и периодической последовательности видеопульсов

На практике сначала удобно измерять периодически повторяющийся сигнал, например, в осциллографах. Далее меняя частоту повторения Ω_i или период повторения T_i можем интерполировать огибающую линейчатого спектра, что будет совпадать со сплошным спектром одиночного сигнала по времени. Значит, линейчатый спектр сохраняет информацию о сплошном спектре. Как это объяснить физически?

- 1) Берем спектр суммы 2-х одинаковых импульсов. С учетом теоремы о запаздывании спектров получаем формулу (1)



$$\dot{S}_{\Sigma 2}(\omega) = \dot{S}(\omega) + \dot{S}(\omega)e^{-j\omega T_i}, \quad (1)$$

$$\dot{S}_{\Sigma 2}(\omega) = \dot{S}(\omega)[1 + e^{-j\omega T_i}], \quad (2)$$

$$\dot{S}_{\Sigma 2}(\omega) = |\dot{S}(\omega)| \cdot |1 + e^{-j\omega T_i}| = S(\omega) \sqrt{(1 + \cos \omega T_i)^2 + \sin^2 \omega T_i} =$$

$$S(\omega) \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \omega T_i} = S(\omega) \sqrt{2} \sqrt{2 \cos^2 \left(\frac{\omega T_i}{2}\right)} = S(\omega) \cdot 2 \cdot \cos \frac{\omega T_i}{2}. \quad (3)$$

Правая часть уравнения (3) – спектр одиночного видеоимпульса, умноженный на осциллирующий множитель. Осцилляция достигает максимума при $\frac{\omega T_i}{2} = n\pi$, при частоте $\omega = \frac{2\pi}{T_i}n = \Omega_i n$. (4)

2) Рассмотрим теперь спектр n следующих друг за другом импульсов

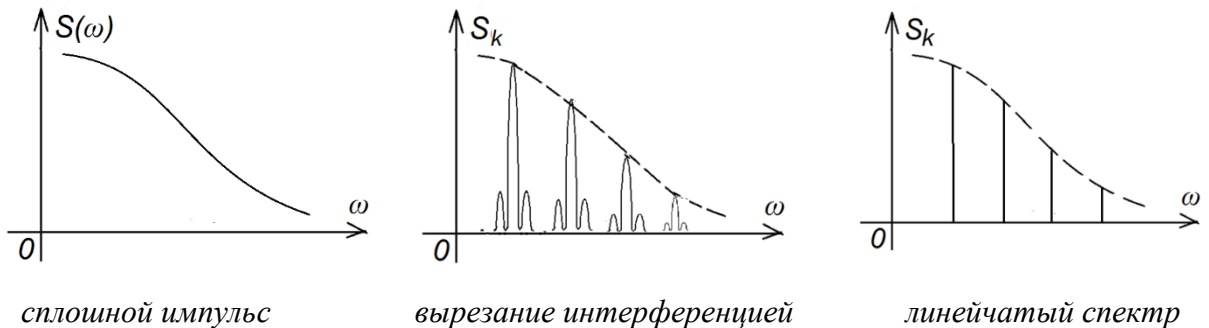
$$f(t) + f(t - T_i) + \dots + f(t - nT_i).$$

$$\dot{S}_{\Sigma n}(\omega) = \dot{S}(\omega)[1 + e^{-j\omega T_i} + e^{-j2\omega T_i} + \dots + e^{-j(n-1)\omega T_i}] = \dot{S}(\omega) \frac{e^{-jn\omega T_i} - 1}{e^{-j\omega T_i} - 1}, \quad (5)$$

$$|\dot{S}_{\Sigma n}(\omega)| = S_{\Sigma n}(\omega) = |\dot{S}(\omega)| \frac{\sqrt{[\cos(n\omega T_i - 1)]^2 + \sin^2 n\omega T_i}}{\sqrt{[\cos(\omega T_i - 1)]^2 + \sin^2 \omega T_i}} = S(\omega) \frac{|\sin \frac{n\omega T_i}{2}|}{|\sin \frac{\omega T_i}{2}|}; \quad (6)$$

Для амплитудного спектра последовательности видеоимпульсов получили дополнительные множители типа *интерферирующих членов*.

Значит, спектр последовательности n импульсов равен спектру исходного сигнала, умноженного на интерферирующий член типа $\frac{|\sin nx|}{|\sin x|}$, т.е. этот множитель из сплошного спектра $S(\omega)$ как бы вырезает отдельные узкие кусочки. Если продолжить n до бесконечности, то эти выбросы сузятся – получится чисто линейчатый спектр. Следовательно, переход сплошного спектра в линейчатый физически объясняется интерференцией.



1.12. Перенос спектра в область высоких частот

Основная часть (площадь) спектра приходится низким гармоникам. Для изучения таких видеосигналов потребовались бы антенны громадных размеров $\sim \lambda \rightarrow \infty (\omega \rightarrow 0)$. Поэтому в эфир обычно посылают не видеоимпульсы, а радиоимпульсы (о чем расскажем подробно позднее, видеоимпульс, как бы, заполняется более высокими частотами). Преобразование видеоимпульса в радиоимпульсы и есть перенос спектра в область высоких частот.

Максимум энергии видеоимпульса лежит в области низких частот, хотя пределы интегрирования по частоте от 0 до ∞ (смотри формулу Парсеваля)

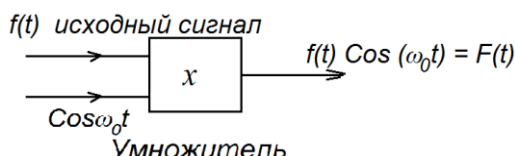
$$W = \int_0^\infty \frac{S^2(\omega)}{\pi} d\omega. \quad (1)$$

$$\dot{S}(\omega) \leq \int_{-\infty}^\infty |f(t)e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^\infty |f(t)| dt = S(0). \quad (2)$$

$$\text{Итого, } \dot{S}(\omega) \leq S(0). \quad (3)$$

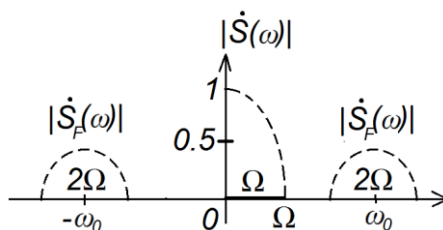
Вот почему непосредственное излучение видеоимпульсов затруднено, требовались бы слишком большие размеры антенн.

Перенос основной части энергии в область высоких частот является частным случаем модуляции.



Если $f(t)$ имеет своим спектром $\dot{S}(\omega)$, то каков спектр функции $F(t)$? Косинус преобразуем по формуле Эйлера.

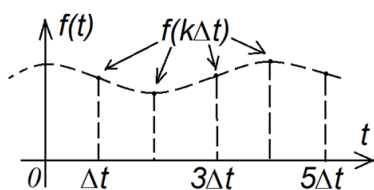
$\dot{S}_F = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt = \frac{1}{2}\dot{S}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\dot{S}(\omega + \omega_0)$, т.е. получается геометрическая сумма. Формула составлена в соответствии с теоремой смещения спектров.



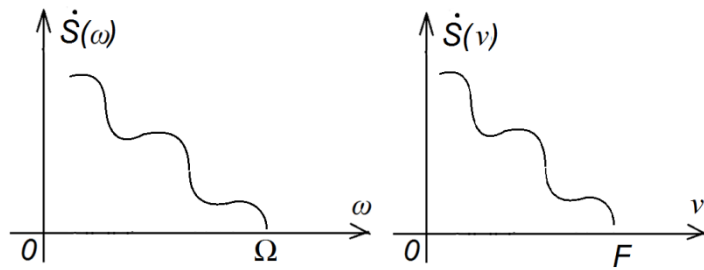
При $\omega_0 \gg \Omega$ интервал частот не перекрываются, осуществляется неискаженный перенос спектра в область высоких частот. При амплитудной модуляции (умножение исходного сигнала на гармонический сигнал) ширина спектра справа и слева удваиваются до 2Ω .

1.13. Передача непрерывных сообщений с помощью импульсных сигналов

Теорема Котельникова (доказана в 1933 г., см. [Гольдман С. Теория информации. Изд. иностр. лит., 1957. – 446 с.]



Всякая непрерывная функция с ограниченным спектром полностью определяется своими значениями в дискретных точках, взятых через интервалы $\Delta t = \frac{\pi}{\Omega}$, где Ω - верхняя круговая граничная частота спектра.



→ Если так, то $\Delta t = \frac{1}{2F}$, где F – верхняя простая частота спектра.
 $\omega = 2\pi\nu$, где ν – обычная частота.

Смысл теоремы Котельникова состоит в том, что если требуется передать непрерывную функцию $f(t)$ с ограниченным спектром, то не нужно передавать все значения функции; достаточно передать отдельные мгновенные значения $f(k\Delta t)$, отсчитанные через Δt . Теорема утверждает – через выделенные точки кривая может быть проведена так, чтобы сохранить информацию о непрерывном сообщении. Быстрые изменения функции на интервале между соседними точками возможны только в том случае, если в составе функции (спектра) имеются достаточно высокие частоты.

1.14. О связи коэффициентов разложения ограниченных спектров и дискретных значений непрерывной информации, взятых через $\Delta t = \frac{\pi}{\Omega}$

По спектральному методу

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1)$$

или

$$f(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} S(\omega) e^{j\omega k\Delta t} d\omega. \quad (2)$$

Согласно теореме Котельникова спектр задан на конечном интервале 2Ω :

$$S(\omega) = \begin{cases} S(\omega), & -\Omega < \omega < \Omega \\ 0, & \text{если } |\omega| > \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Значит, спектр можно разложить в ряд Фурье по частотам

$$\dot{S}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{j\frac{2\pi}{2\Omega}k\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\Delta t\omega}. \quad (4)$$

Для разложения (4) можно найти коэффициенты Фурье $\dot{C}_k$ при разложении по частотам

$$\dot{C}_k = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{-j\frac{\pi}{\Omega}k\omega} d\omega \quad (5)$$

или

$$\dot{C}_k = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{-jk\Delta t\omega} d\omega = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} S(\omega) e^{-j\omega k\Delta t} d\omega. \quad (6)$$

Если интервал разбиения $\Delta t = \frac{\pi}{\Omega}$ и если сравнить формулы (2) и (6), то получаем соотношение

$$\boxed{\Omega \cdot \dot{C}_k = \pi f(-k\Delta t).} \quad (7)$$

Итого, символически получаем логическое соотношение

$$\boxed{f(t) \rightleftharpoons \dot{S} \rightleftharpoons \dot{C}_k \rightleftharpoons \frac{\pi}{\Omega} f(-k\Delta t).} \quad (8)$$

Значит, если имеем непрерывную функцию с некоторым ограниченным спектром, то она полностью определяется своим спектром; а спектр, в свою очередь, полностью определяется коэффициентом Фурье, а они пропорциональны $f(-k\Delta t)$. Другими словами, $f(t)$ в любом интервале времени t полностью определяется дискретными значениями, взятыми в точках $k\Delta t = k \frac{\pi}{\Omega}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

1.15. Распределение Котельникова

Математически раскроем логическое соотношение (8) предыдущей темы.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1)$$

Используя соотношение (4) предыдущей темы, можем записать

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\Delta t \omega} \right] e^{j\omega t} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{C}_k}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{j\omega(t+k\Delta t)} d\omega. \quad (2)$$

$\dot{C}_k$ выносим за знак интегрирования, так как по формуле (5) предыдущей темы $\dot{C}_k$ ищется через интегрирование по ω , поэтому явной зависимости от ω нет.

Продолжим интегрирование формулы (2)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{C}_k}{2\pi} \frac{e^{j\Omega(t+k\Delta t)} - e^{-j\Omega(t+k\Delta t)}}{j(t+k\Delta t)}. \quad (3)$$

Пользуясь формулой (7) предыдущей темы, запишем

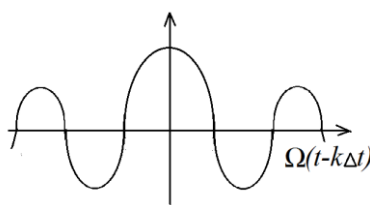
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(-k\Delta t)}{\Omega} \frac{\sin \Omega(t-k\Delta t)}{\Omega(t-k\Delta t)}. \quad (4)$$

Удобно поменять знаки перед $k\Delta t$, то

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(-k\Delta t) \frac{\sin \Omega(t-k\Delta t)}{\Omega(t-k\Delta t)}} - \text{ряды Котельникова.} \quad (5)$$

Это соотношение называется разложением непрерывной функции в ряд Котельникова, где $f(k\Delta t)$ мгновенные значения колебания, отсчитанные в моменты $k\Delta t$. Простота определения этих коэффициентов является большим преимуществом ряда Котельникова. Ограниченность спектра означает, что за время между отсчетами колебания не могут существенно изменяться.

Исходную функцию $f(t)$ разлагаем в ∞ ряд, где в качестве базиса используется функция



$$\frac{\sin \Omega(t-k\Delta t)}{\Omega(t-k\Delta t)}.$$

Но каждая из этих функций смещена на определенную величину.

1.16. Спектральный метод анализа линейных искажений

Линейные искажения могут быть лишь результатом изменений амплитудных и фазовых соотношений между гармониками спектра (деформация амплитудного и фазового спектров). Причиной искажений являются частотно-избирательные свойства линейных цепей, обусловленные зависимостью индуктивных и емкостных сопротивлений от частоты. С точки зрения воспроизведения формы импульсов, приемник можно рассматривать как линейную систему.



Задачу можно несколько упростить:

- 1) $Z_i \ll Z_{вх}$, (1), т.е. на входе «чистый» ЭДС.
- 2) $Z_n \gg Z_{вых}$, (2), т.е. нагрузка тока не потребляет, значит рассматриваем на выходе напряжение.

Зная $U_{вх}(t)$, с помощью частотных характеристик можно определить $U_{вых}(t)$. При этом не требуется знания того, что делается внутри. Любой 4-хполюсник характеризуется комплексным коэффициентом передачи для установившегося режима

$$\frac{\dot{U}_{вых}(\omega)}{\dot{U}_{вх}(\omega)} = \frac{U_{вых}(\omega)}{U_{вх}(\omega)} e^{-j[\varphi_{вых}(\omega) - \varphi_{вх}(\omega)]} = k(\omega) e^{-j\Psi(\omega)}. \quad (3)$$

$\dot{U}_{вых}(\omega)$ – спектральная плотность (спектр) выходного сигнала;

$\dot{U}_{вх}(\omega)$ – спектр входного сигнала;

$k(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика системы («АЧХ»);

$\Psi(\omega)$ – фазо-частотная характеристика системы («ФЧХ»).

При спектральном анализе линейных искажений действие каждой гармоники спектра сигнала можно рассматривать совершенно независимо. Каждая гармоника ω_1 входного сигнала будет изменяться в $k(\omega_1)$ раз и поворачиваться по фазе на угол $\Psi(\omega_1)$.

Спектральный метод анализа линейных искажений включает 3 последовательных этапа ($U_{вх}(t)$ и $\dot{k}(\omega)$ считаем известными):

1. Определение комплексной спектральной плотности входного сигнала с помощью преобразования Фурье

$$\dot{S}_{вх}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{вх}(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4)$$

2. Определение комплексной спектральной плотности выходного сигнала по известным частотным характеристикам системы и найденному спектру входного сигнала

$$\dot{s}_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \dot{s}_{\text{ВХ}}(\omega) \dot{k}(\omega). \quad (5)$$

3. Определение формы выходного сигнала по времени с помощью другого преобразования Фурье

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{s}_{\text{ВЫХ}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (6)$$

В принципе аппарат гармонического разложения дает возможность рассчитать линейные системы.

1.17. Пример расчета линейных искажений

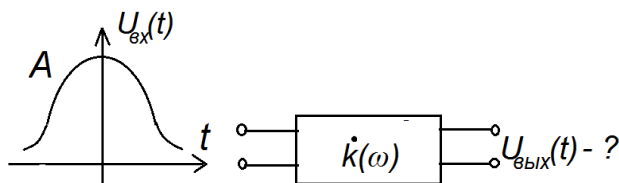
Дано:

$$U_{\text{ВХ}}(t) = A e^{-\beta^2 t^2}. \quad (1)$$

$$\dot{k}(\omega) = B e^{-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}. \quad (2)$$

$U_{\text{ВЫХ}}(t)$ - ?

Для удобства дальнейшего сравнения параметры α , β берутся одной размерности



Расчет проводим по формулам (4), (5), (6). Ищем амплитуду и длительность выходного сигнала, затем сравниваем с амплитудой и длительностью входного сигнала. Так определяем линейные искажения:

$$1. \dot{s}_{\text{ВХ}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{ВХ}}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\beta^2 t^2} e^{-j\omega t} dt = \frac{A \sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}. \quad (3)$$

$$2. \dot{s}_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \dot{s}_{\text{ВХ}}(\omega) \dot{k}(\omega) = \frac{AB \sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{4\beta^2}\right)\omega^2} = \frac{AB \sqrt{\pi}}{\beta} e^{-m^2 \omega^2}, \quad (4)$$

$$\text{где } m^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{4\beta^2}. \quad (5)$$

$$3. U_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{s}_{\text{ВЫХ}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{k}(\omega) \dot{s}_{\text{ВХ}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ = \frac{AB}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2 \omega^2 + j\omega t} d\omega. \quad (6)$$

Сначала преобразуем степень подынтегрального выражения.

$$m^2 \omega^2 - j\omega t = (m\omega)^2 - j\omega t \frac{2m}{2m} + \left(\frac{jt}{2m}\right)^2 - \left(\frac{jt}{2m}\right)^2. \quad (7)$$

$$\text{Значит, } U_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{AB}{2\sqrt{\pi}\beta} e^{-\frac{t^2}{4m^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[m\omega - \frac{jt}{2m}\right]^2} d\omega. \quad (8)$$

Применяя замену переменных $x = m\omega - \frac{jt}{2m}$ и, используя табличный интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (9)$$

получим

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{AB}{2\beta m} e^{-\frac{t^2}{4m^2}}. \quad (10)$$

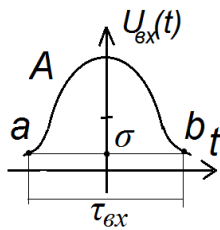
Методом сравнения проведем более подробное исследование линейных искажений на выходе 4-х полюсника.

1. Сначала оценим искажение амплитуды.

$$\text{Амплитуда входного сигнала } U_{\text{ВХ}} = A. \quad (11)$$

$$\text{Амплитуда выходного сигнала } U_{\text{ВЫХ}} = \frac{AB}{2\beta m}. \quad (12)$$

Если $m, \beta \text{ const}$, то выходная амплитуда изменилась только на постоянное число. Нет особой проблемы в этом: в случае чего, используя усилитель, можно изменить амплитуду (если она уменьшилась).



2. Искажение длительности импульса.

Найдем аналитический вид входного сигнала.

$$A \cdot 0.1 = A e^{-\beta^2 \left(\frac{\tau_{\text{ВХ}}}{2}\right)^2} \quad (13)$$

точки σ - а или b,

отсюда

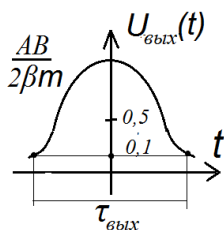
$$\frac{1}{\ln 10} = -\beta^2 \left(\frac{\tau_{\text{ВХ}}}{2}\right)^2 \quad \text{или}$$

$$\ln 10 = \beta^2 \left(\frac{\tau_{\text{ВХ}}}{2}\right)^2. \quad (14)$$

Итого, длительность входного сигнала имеет аналитический вид

$$\tau_{\text{ВХ}} = 2 \frac{\sqrt{\ln 10}}{\beta}. \quad (15)$$

Теперь оценим аналитический вид выходного сигнала.



$$\frac{AB}{2\beta m} \cdot 0.1 = \frac{AB}{2\beta m} e^{-\frac{1}{4m^2} \left(\frac{\tau_{\text{ВЫХ}}}{2}\right)^2} \quad (16)$$

Применяя выше рассмотренный метод, получим

$$\tau_{\text{ВХ}} = 4m\sqrt{\ln 10}. \quad (17)$$

Сравнение формул (15) и (17) показывает, что импульс перетерпел изменения по длительности.

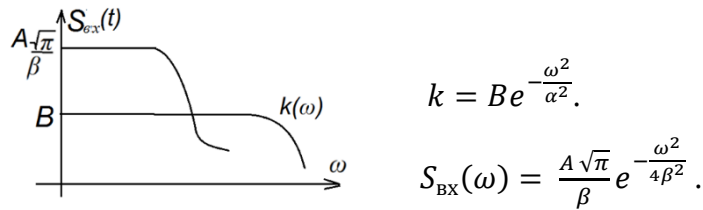
$$m^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{4\beta^2} - \text{см. формулу (5).}$$

Для $\boxed{\alpha \gg \beta}$ $m^2 \approx \frac{1}{4\beta^2}$, т.е. $m \approx \frac{1}{2\beta}$. (18)

Отсюда $\tau_{\text{вх}} \approx \tau_{\text{вых}}$.

Тогда $U_{\text{вых}}(t) \approx \frac{AB}{1} e^{-\beta^2 t^2}$.

Значит, условие $\alpha \gg \beta$ приводит к сохранению формы (длительности) импульса. Этот случай физически соответствует тому, что полоса пропускания линейного 4-х полюсника намного больше той части спектра входного сигнала, которая необходима для удовлетворительного изображения. При этом каждая гармоника входного сигнала для такой $k(\omega)$ проходит почти без искажения до самых высоких частот.



$$f(p) = \int_0^{\infty} t e^{-pt} dt = -t \frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{p} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{p} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2}.$$

3. Допустим $f(t) = t^3$.

$$\begin{aligned} f(p) &= \int_0^{\infty} t^3 e^{-pt} dt = t^3 \frac{1}{(-p)} e^{-pt} = t^3 \frac{1}{(-p)} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} 3t^2 e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{p} 3t^2 \frac{1}{(-p)} \Big|_0^{\infty} - \frac{3}{p^2} 2 \int_0^{\infty} t e^{-pt} dt = \frac{6}{p^2} t e^{-pt} \frac{1}{(-p)} \Big|_0^{\infty} - \frac{6}{p^3} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{6}{p^3} \cdot \frac{1}{(-p)} = \frac{6}{p^4}; \end{aligned}$$

Значит, $f_n(t) = t^n$, где $n = 1, 2, 3 \dots!$, то

$$\boxed{f_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}}.$$

4. Экспоненциально затухающее напряжение: $f(t) = e^{-\alpha t}$, где $\alpha = \text{const}$.

$$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{p + \alpha};$$

5. Экспоненциально возрастающее напряжение: $f(t) = e^{\alpha t}$. Такая функция получается, например, при самовозбуждении генераторов.

$$f(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{p - \alpha};$$

6. $f(t) = \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$.

$$f(p) = \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right] e^{-pt} dt = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega} \right] =$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\frac{p + jw - p + jw}{p^2 + w^2} \right] = \frac{w}{p^2 + w^2}.$$

Обратим внимание – в числителе отсутствует зависимость от p переменной.

$$7. f(t) = \cos(wt) = \frac{e^{jw t} + e^{-jw t}}{2};$$

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [e^{jw t} + e^{-jw t}] e^{-p t} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p - jw} + \frac{1}{p + jw} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{p + jw + p - jw}{p^2 + w^2} \right] = \frac{p^2}{p^2 + w^2}. \end{aligned}$$

Обратим внимание – для $\cos(wt)$ числитель изображения зависит от p переменной.

$$8. \text{Затухающая синусоида } f(t) = e^{-\alpha t} \sin(wt) = e^{-\alpha t} \left[\frac{e^{jw t} - e^{-jw t}}{2j} \right]. \text{ Как показывают вышеуказанные расчеты, изображение примет вид } f(p) = \frac{w}{(p + \alpha)^2 + w^2};$$

$$9. \text{Затухающая косинусоида } f(t) = e^{-\alpha t} \cos(wt)$$

$$f(p) = \frac{w}{(p + \alpha)^2 + w^2}.$$

$$10. \text{Запаздывающее экспоненциальное колебание } f(t) = E \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} = E e^{\alpha \tau} \cdot e^{-\alpha t}.$$

Интегрирование проводится только по переменной t , поэтому выражение $E e^{\alpha \tau}$ выносится за знак интегрирования $f(p) = E e^{\alpha \tau} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-p t} dt = E e^{\alpha \tau} \frac{1}{p + \alpha}.$

Контрольная работа №1

Спектральный метод анализа

Вариант 1

1. Одна из 2-х основных формул спектрального метода анализа (Фурье преобразование):

$$1.1. \dot{S}(w) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-jw t} dt$$

$$1.2. \dot{S}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-jw t} dt$$

$$1.3. \dot{S}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{jw t} dt$$

$$1.4. \dot{S}(w) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{jw t} dt$$

2. Наибольшая информация об одиночном видеоимпульсе заключена в

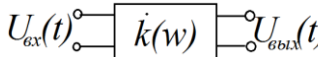
2.1. Низких гармониках

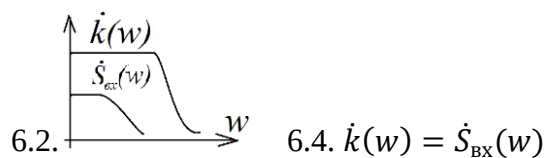
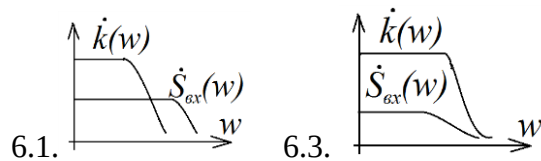
2.2. Средних гармониках

2.3. Высших гармониках

2.4. Нет правильного ответа

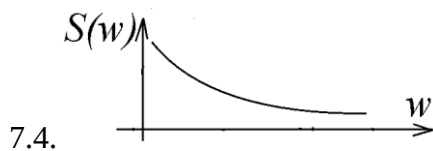
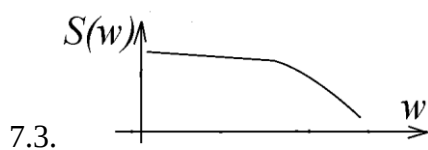
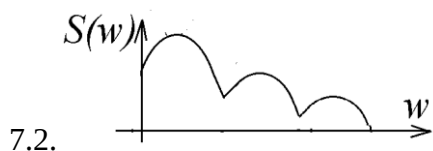
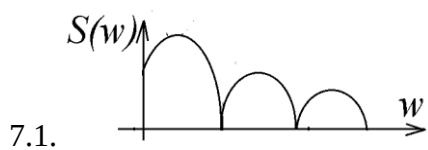
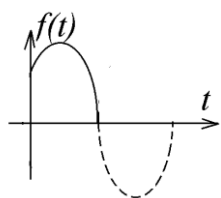
3. Чем больше длительность импульса, тем
- 3.1. Короче спектр
 - 3.2. Шире спектр
 - 3.3. Спектр не меняется
 - 3.4. Нет правильного ответа
4. Для последовательности видеоимпульсов спектр
- 4.1. Сплошной
 - 4.2. Линейчатый
 - 4.3. Спектр отсутствует
 - 4.4. Нет правильного ответа
5. Интеграл $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{s}(w + \Omega) e^{j\omega t} dw$ равен
- 5.1. $e^{-j\Omega t} \cdot f(t)$
 - 5.2. $e^{j\Omega t} \cdot f(-t)$
 - 5.3. $f(-t)$
 - 5.4. $f(t)$
 - 5.5. $f(-t)e^{-j\Omega t}$
 - 5.6. $f(t)e^{j\Omega t}$

6.  Нет линейных искажений, если



где $\dot{k}(w)$ – коэффициент передачи линейного четырехполюсника
 $\dot{S}_{\text{вх}}(w)$ – спектр входного сигнала.

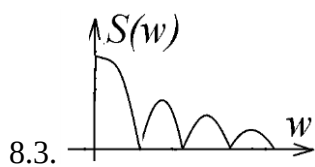
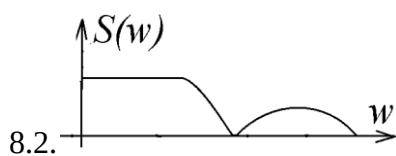
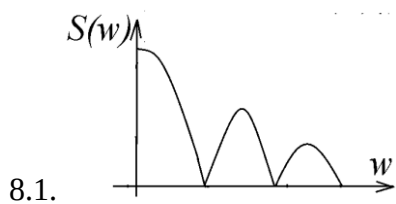
7. Найти амплитудный спектр для функций вида

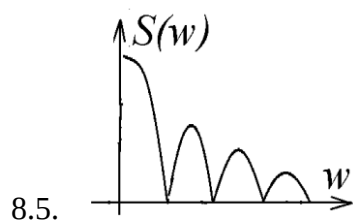
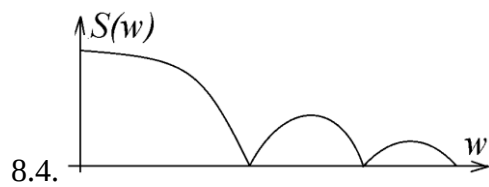


8. Для прямоугольного импульса с амплитудой A и длительностью τ амплитудный спектр имеет вид

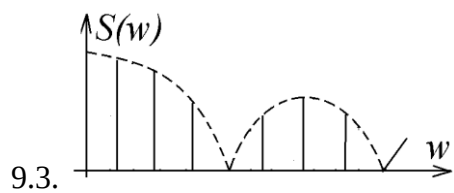
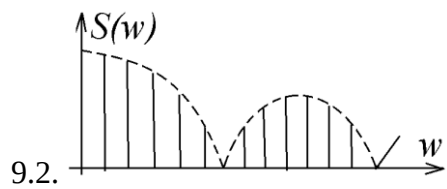
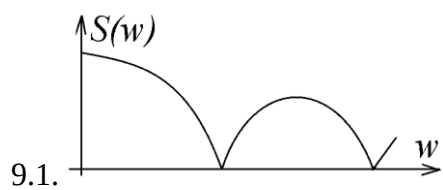
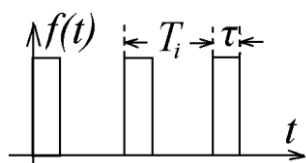


- Если, сохраняя амплитуду сигнала по времени неизменной, увеличить длительность в 2 раза, то амплитудный спектр примет вид





9. Дана последовательность видеосигналов вида, где $T_i = 5\tau$, то амплитудный спектр этих сигналов примет вид



- 9.4. Нет правильного ответа.

Вариант 2

1. Одна из 2-х основных формул спектрального метода анализа (Фурье-преобразование):

1.1. $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(w) e^{jw t} dw$

1.2. $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \dot{S}(w) e^{jw t} dw$

1.3. $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(w) e^{-jw t} dw$

1.4. $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \dot{S}(w) e^{-jw t} dw$

2. Амплитудный спектр импульсов $S(w)$ чаще всего с увеличением частоты w

2.1.увеличивается

2.2.не меняется

2.3.убывает

2.4.нет правильного ответа

3. Чем короче длительность импульса, тем

3.1. короче спектр

3.2.шире спектр

3.3.спектр не меняется

3.4.нет правильного ответа

4. Спектр линейчатый, если

4.1. много импульсов

4.2. один импульс

4.3. спектр отсутствует

4.4. нет правильного ответа

5. Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-jw \tau} d\tau$ равен

5.1. $e^{-jw \tau} \dot{S}(-w)$

5.2. $e^{jw \tau} \dot{S}(-w)$

5.3. $\dot{S}(-w)$

5.4. $\dot{S}(w)$

5.5. $e^{jw \tau} \dot{S}(w)$

5.6. $e^{-jw \tau} \dot{S}(w)$

6. При прохождении импульсного сигнала через линейный 4-х полюсник не будет искажений, если

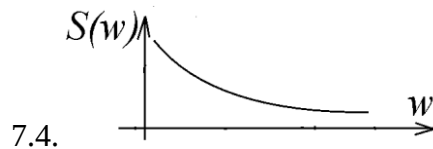
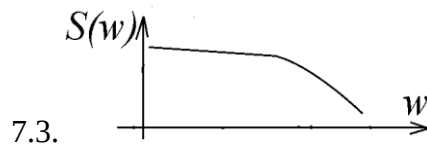
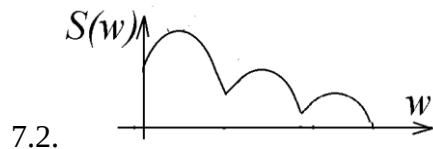
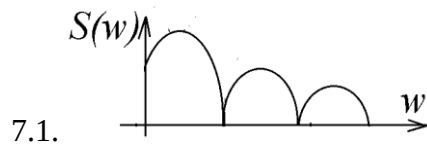
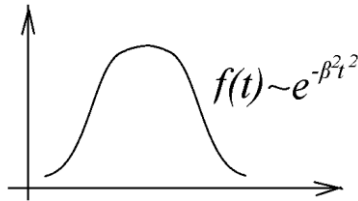
6.1.Ширина спектра входного сигнала одного порядка с шириной
коэффициента передачи 4-х-полосника

6.2.Ширина спектра входного сигнала намного больше ширины коэффициента
передачи

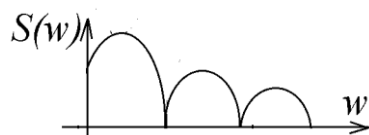
6.3.Ширина спектра входного сигнала намного меньше ширины коэффициента
передачи

$$6.4. \dot{k}(w) = \dot{S}_{\text{вх}}(w)$$

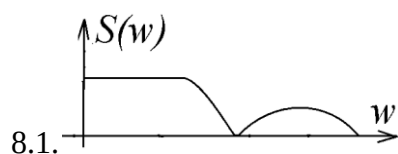
7. Найти спектральную функцию (амплитудный спектр) для «колокола»

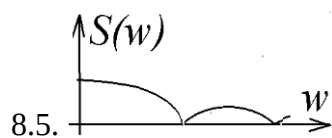
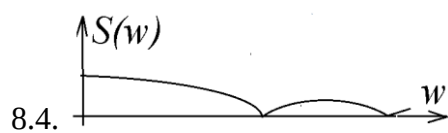
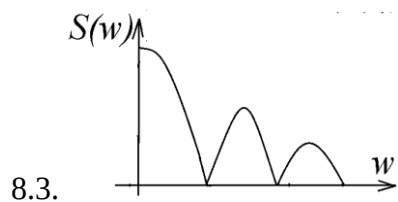
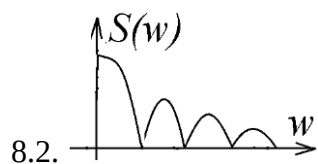


8. Для прямоугольного импульса с амплитудой A и длительностью τ
амплитудный спектр имеет вид

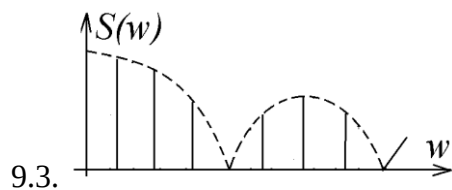
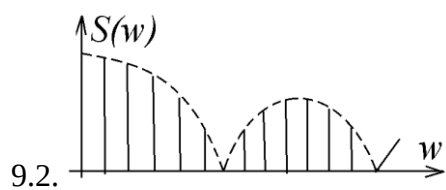
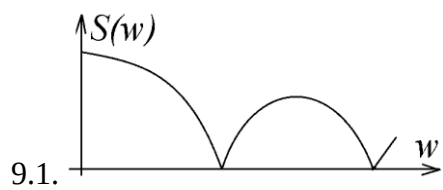
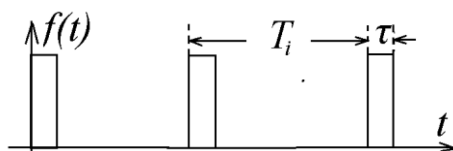


Если, сохраняя длительность импульса без изменения, уменьшить
амплитуду в 2 раза, то амплитудный спектр примет вид:





9. Дана последовательность видеоимпульсов, где $T_i = 10\tau$, то амплитудный спектр этих сигналов примет вид

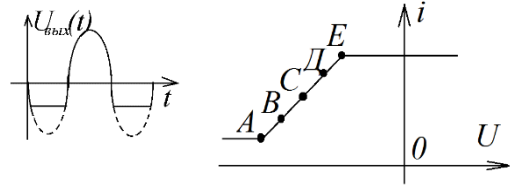


9.4. Нет правильного ответа.

Контрольная работа по импульсной технике №2

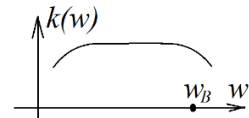
Вариант 1

1. Если синусоидальный сигнал на выходе усилителя низкой частоты (УНЧ) имеет вид , то рабочая точка в анодно-сеточной характеристике УНЧ в ...

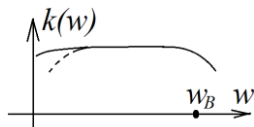


- 1.1.Точке А
- 1.2.Точке В
- 1.3.Точке С
- 1.4.Точке Д
- 1.5.Точке Е

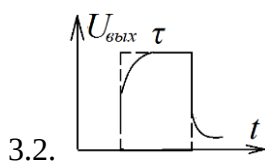
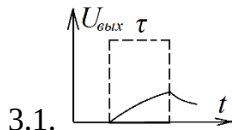
2. Дан линейный 4-х полюсник с коэффициентом передачи

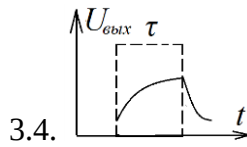
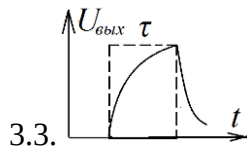


Что можно было бы подключить в 4-х полюсник, чтобы получить характеристику вида

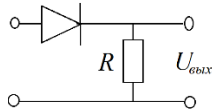


- 2.1.Большую емкость С в переходных цепочках
 - 2.2.Последовательно к нагрузке дополнительную катушку с индуктивностью L
 - 2.3.Параллельно к нагрузке дополнительную катушку с индуктивностью L
 - 2.4.Большее сопротивление R в переходных цепочках
3. На линейный 4-х полюсник подается прямоугольный импульс длительностью τ . Определить графически вид входного сигнала, если полоса пропускания 4-х полюсника $\Delta\nu = \frac{3}{\tau}$

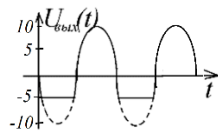




4. При подаче синусоидального сигнала с амплитудой 10 В на вход ограничителя



получилось выходное напряжение вида



при условиях ограничения:

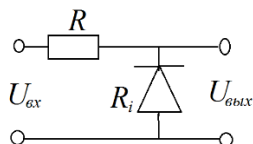
4.1. $R_{i\text{закр}} \gg R$; $R_{i\text{откр}} = R$

4.2. $R_{i\text{закр}} \gg R$; $R_{i\text{откр}} \ll R$

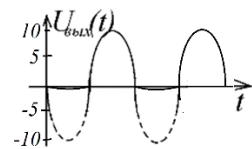
4.3. $R_{i\text{закр}} = R$; $R_{i\text{откр}} \ll R$

4.4. Картина неправильная

5. При подаче синусоидального сигнала с амплитудой 10 В на вход ограничителя



Получилось выходное напряжение вида



при условиях ограничения:

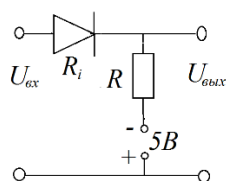
5.1. $R_{i\text{закр}} \gg R$; $R_{i\text{откр}} \ll R$

5.2. $R_{i\text{закр}} \gg R$; $R_{i\text{откр}} = R$

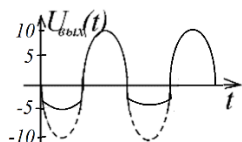
5.3. $R_{i\text{закр}} = R$; $R_{i\text{откр}} \ll R$

5.4. Картина неправильная

6. При подаче синусоидального сигнала с амплитудой 10 В на вход ограничителя ($R_{\text{ист}} = 0$)



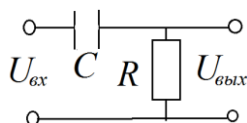
получилось выходное напряжение вида



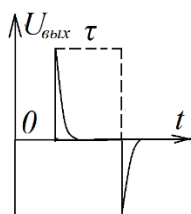
при условиях ограничения:

- 6.1. $R_{\text{изакр}} \gg R$; $R_{\text{откр}} = R$
- 6.2. $R_{\text{изакр}} \gg R$; $R_{\text{откр}} \ll R$
- 6.3. $R_{\text{изакр}} = R$; $R_{\text{откр}} \ll R$
- 6.4. Картинка неправильная

7. При подаче прямоугольного импульса длительностью τ на линейную цепочку



На выходе получился сигнал



при условиях:

- 7.1. $RC \approx \tau$
- 7.2. $RC \gg \tau$
- 7.3. $RC \ll \tau$
- 7.4. Нет правильного ответа

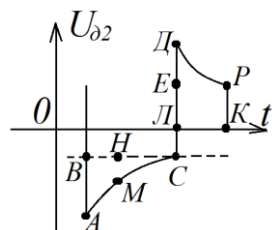
8. На мультивибратор подаем импульс очень короткой длительности, интересуемся только полярностью сигнала. Условию самовозбуждения мультивибратора соответствует

- 8.1. $U_{\text{д1}} \downarrow$ $U_{\text{а1}} \downarrow$ $U_{\text{д2}} \uparrow$ $U_{\text{а2}} \uparrow$

8.2. $U_{д1} \downarrow \quad U_{a1} \uparrow \quad U_{д2} \downarrow \quad U_{a2} \uparrow$

8.3. $U_{д1} \downarrow \quad U_{a1} \uparrow \quad U_{д2} \uparrow \quad U_{a2} \downarrow$

8.4. $U_{д1} \downarrow \quad U_{a1} \downarrow \quad U_{д2} \downarrow \quad U_{a2} \uparrow$



9.

При начале разряда через емкость C на сеточном сопротивлении $R_{д2}$ падает напряжение (мультивибратор)

9.1. СЛ

9.2. ДЕ

9.3. АВ

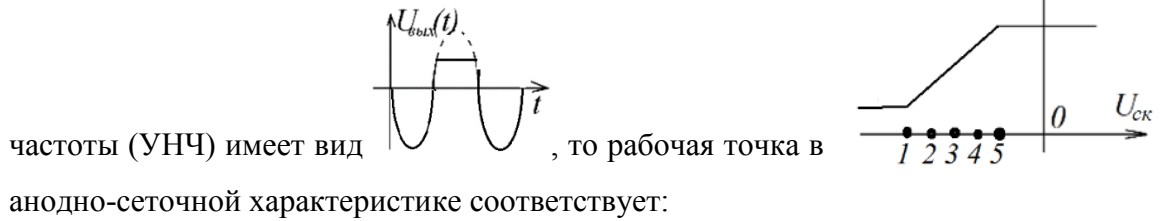
9.4. АК

9.5. МН

9.6. $U=0$

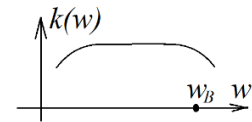
Вариант 2

1. Если синусоидальный сигнал на выходе усилителя низкой

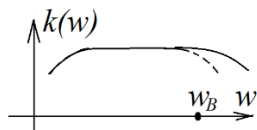


- 1.1. Точке 1
- 1.2. Точке 2
- 1.3. Точке 3
- 1.4. Точке 4
- 1.5. Точке 5

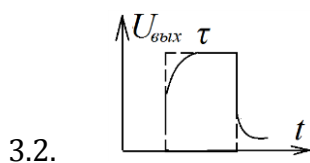
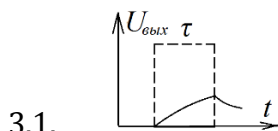
2. Дан линейный 4-х полюсник с коэффициентом передачи

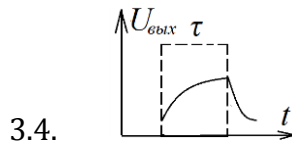
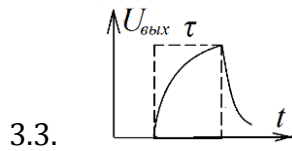


Что можно было бы подключить в 4-х полюсник, чтобы получить характеристику вида

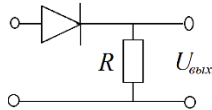


- 2.1. Большую емкость C в переходных цепочках
 - 2.2. Большее сопротивление R в переходных цепочках
 - 2.3. Последовательно к нагрузке дополнительную катушку с индуктивностью L
 - 2.4. Параллельно к нагрузке дополнительную катушку с индуктивностью L
3. На линейный 4-х полюсник подается прямоугольный импульс длительностью τ . Определить графически вид входного сигнала, если полоса пропускания 4-х полюсника $\Delta\nu = \frac{1}{\tau}$

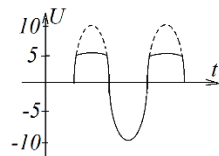




4. При подаче синусоидального сигнала с амплитудой 10 В на вход ограничителя



получилось выходное напряжение вида



при условиях ограничения:

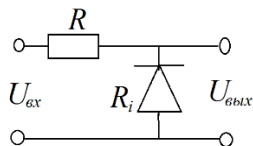
4.1. $R_{i\text{закр}} \gg R; R_{i\text{откр}} = R$

4.2. $R_{i\text{закр}} \gg R; R_{i\text{откр}} \ll R$

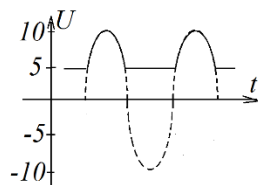
4.3. $R_{i\text{закр}} = R; R_{i\text{откр}} \ll R$

4.4. Картина неправильная

5. При подаче синусоидального сигнала с амплитудой 10 В на вход ограничителя



Получилось выходное напряжение вида



при условиях ограничения:

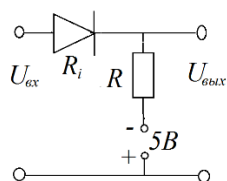
5.1. $R_{i\text{закр}} \gg R; R_{i\text{откр}} \ll R$

5.2. $R_{i\text{закр}} \gg R; R_{i\text{откр}} = R$

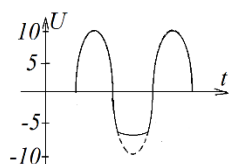
5.3. $R_{i\text{закр}} = R; R_{i\text{откр}} \ll R$

5.4. Картина неправильная

6. При подаче синусоидального сигнала с амплитудой 10 В на вход ограничителя ($R_{ист} = 0$)

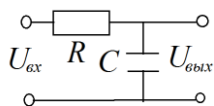


получилось выходное напряжение вида

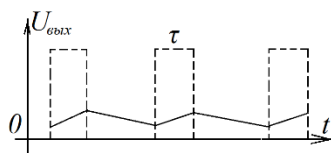


при условиях ограничения:

- 6.1. Картинка неправильная
 - 6.2. $R_{i\text{закр}} \gg R; R_{i\text{откр}} \ll R$
 - 6.3. $R_{i\text{закр}} \gg R; R_{i\text{откр}} = R$
 - 6.4. $R_{i\text{закр}} = R; R_{i\text{откр}} \ll R$
7. При подаче прямоугольного импульса длительностью τ на линейную цепочку



На выходе получился сигнал



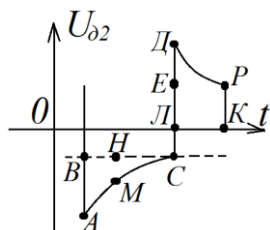
при условии:

- 7.1. $RC \gg \tau$
 - 7.2. $RC \approx \tau$
 - 7.3. $RC \ll \tau$
 - 7.4. Нет правильного ответа
8. На мультивибратор подаем импульс очень короткой длительности, интересуемся только полярностью сигнала. Условию самовозбуждения мультивибратора соответствует
- 8.1. $U_{д1} \uparrow U_{a1} \uparrow U_{д2} \downarrow U_{a2} \downarrow$

8.2. $U_{д1} \uparrow U_{a1} \downarrow U_{д2} \uparrow U_{a2} \downarrow$

8.3. $U_{д1} \uparrow U_{a1} \uparrow U_{д2} \uparrow U_{a2} \downarrow$

8.4. $U_{д1} \uparrow U_{a1} \downarrow U_{д2} \downarrow U_{a2} \uparrow$



9.

При начале заряда через емкость C на сеточном сопротивлении $R_{д2}$ падает напряжение (мультивибратор)

9.1. СЛ

9.2. ДЕ

9.3. АВ

9.4. АК

9.5. МН

9.6. $U=0$

2. Операционный метод анализа импульсных сигналов (метод преобразования Лапласа)

Простым и действенным аппаратом исследования переходных процессов является преобразование Лапласа – операторный метод. Как и для спектрального метода анализа, основу метода Лапласа составляют 2 формулы.

1. Прямые преобразования Лапласа, т.е. L – преобразование функции вещественного переменного $f(t)$, определяется соотношением

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = f(p). \quad (1)$$

В книге [Зиновьева, Филиппова] написано: «... Если в выражениях для изображений вместо p подставить $j\omega$, то, как следует из рассмотренного, будут получены соответствующие спектральные функции».

По-моему, это не совсем так:

- 1) *предел не от $-\infty$ до $+\infty$, а от 0 до ∞ ;*
- 2) *следует учитывать и активную часть p , которая определяет быстроту затухания $f(t)$ при обратном преобразовании Лапласа (достигается удовлетворение условия абсолютной интегрируемости).*

Или сокращенно $L[f(t)] = f(p)$. (2)

Формула (1) служит для нахождения преобразованной функции $f(p)$ - изображению, соответствующей заданной функции $f(t)$ – оригиналу.

Условия применимости преобразования Лапласа:

1. $f(t)$ вместе со всеми производными (достаточно много) должна быть непрерывна за исключением некоторых точек разрыва I рода, причем в любом интервале их число конечно.
2. $f(t) = 0$, если $t < 0$.
3. Для каждой $f(t)$ можно найти такие постоянные M и σ_0 , что $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$. (3)

Так как комплексная переменная $p = \sigma + j\omega$, то в подынтегральном выражении левой части формулы (1) появляется дополнительное затухающее выражение $e^{-\sigma t}$, что значительно расширяет круг используемых функций $f(t)$.

2. Можно показать, что при $\sigma > \sigma_0$ существует обратное преобразование Лапласа.

Проведем качественный вывод формулы обратного преобразования Лапласа.

С учетом того, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ можно записать формулу (1) несколько по другому:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = f(p) = f(\sigma + j\omega). \quad (5)$$

По обратному преобразованию Фурье

$$f(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt, \quad (6)$$

где функция комплексного переменного $f(\sigma + j\omega)$ играет, как бы, роль спектра.

По прямому преобразованию Фурье можно записать так

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7)$$

или

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega. \quad (8)$$

Делаем замену переменных $(\sigma + j\omega) = p$, тогда полный дифференциал частоты $d\omega = \frac{dp}{j}$.

Тогда обратное преобразование Лапласа определяется формулой

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} f(p) e^{pt} dp} \quad t \geq 0, \sigma > \sigma_0 \quad (9)$$

или сокращенно $L^{-1}[f(p)] = f(t) \quad (10)$

При изменении σ результат интегрирования не всегда меняется – зависит от так называемых особых точек. Функцию изображения $f(p)$ на практике можно аналитически продолжить и за пределы ограничения $\sigma > \sigma_0$, если не имеет место многозначность функций.

2.1. Метод решения задач с использованием преобразования Лапласа

Сущность метода: в ходе решения задачи ищется не сама функция вещественной переменной $f(t)$, а функция комплексной переменной $f(p)$.

Решение задачи этим методом состоит из 4-х этапов:

1. Записать, как обычно, дифференциально-интегральное уравнение по $f(t)$.
2. Каждое выражение уравнения движения подвергается действию оператора Лапласа $L[\cdot]$. Другими словами, происходит замена переменных от t к p . Получаем уравнение движения относительно изображения $f(p)$. L – преобразование обладает свойством упрощения операции дифференцирования и интегрирования, сводя их к умножению и делению в области функций комплексных переменных. При нулевых начальных условиях, что часто имеет место в импульсной технике, получается даже чисто алгебраическое уравнение.
3. Уравнение движения относительно $f(p)$ решается сравнительно просто.
4. По обратному преобразованию Лапласа, интегрируя изображение $f(p)$ по комплексной переменной p , определяется исходная функция (оригинал) $f(t)$. При этом используется формула (9) предыдущей темы.

Пример решения задач методом преобразования Лапласа покажем позже.

2.2. Определение изображений $f(p)$ по известным оригиналам $f(t)$ – примеры на прямое преобразование Лапласа

1. Допустим дан единичный скачок напряжения.

$$f(t) = \sigma_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для определения изображения применяем формулу

$$\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = f(p). \quad (2)$$

$$f(p) = \sigma_1(p) = \int_0^\infty \sigma_1(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{-p} e^{-pt} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p}. \quad (3)$$

2. Линейно-возрастающая функция (часть пилообразного напряжения) $f(t) = t$.

$$f(p) = \int_0^\infty t e^{-pt} dt. \quad (4)$$

Применяем интегрирование по частям:

$$v = t; \quad u = -\frac{1}{p} e^{-pt}; \quad \int_0^\infty v du = vu \Big|_0^\infty - \int_0^\infty u dv.$$

$$f(p) = \int_0^\infty t e^{-pt} dt = -t \frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{p} e^{-pt} dt = \int_0^\infty \frac{1}{p} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2}.$$

3. Допустим $f(t) = t^3$.

$$\begin{aligned} f(p) &= \int_0^\infty t^3 e^{-pt} dt = t^3 \frac{1}{(-p)} e^{-pt} \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty 3t^2 e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{p} 3t^2 \frac{1}{(-p)} e^{-pt} \Big|_0^\infty - \frac{3}{p^2} 2 \int_0^\infty t e^{-pt} dt = -\frac{6}{p^2} t e^{-pt} \frac{1}{(-p)} \Big|_0^\infty \\ &\quad - \frac{6}{p^3} \int_0^\infty e^{-pt} dt = -\frac{6}{p^3} \frac{1}{(-p)} = \frac{6}{p^4}; \end{aligned}$$

Значит, $f_n(t) = t^n$, где $n = 1, 2, 3 \dots$, то

$$\boxed{f_n(t) = \frac{n!}{p^{n+1}}}.$$

4. Экспоненциально затухающее напряжение: $f(t) = e^{-\alpha t}$, где $\alpha = \text{const}$.

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \frac{1}{p+\alpha};$$

5. Экспоненциально возрастающее напряжение: $f(t) = e^{\alpha t}$. Такая функция получается, например, при самовозбуждении генераторов.

$$f(p) = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \frac{1}{p-\alpha}.$$

$$6. \quad f(t) = \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}.$$

$$f(p) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right] e^{-pt} dt = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right] = \frac{1}{2j} \left[\frac{p+j\omega - p+j\omega}{p^2 + \omega^2} \right] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Обратим внимание – в числителе отсутствует зависимость от p переменной.

$$7. f(t) = \cos(wt) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2j};$$

$$f(p) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}] e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{p+j\omega+p-j\omega}{p^2+\omega^2} \right] = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Обратим внимание – для $\cos(wt)$ числитель изображения зависит от p переменной.

$$8. \text{Затухающая синусоида } f(t) = e^{-\alpha t} \sin(wt) = e^{-\alpha t} \left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right].$$

Как показывают вышеуказанные расчеты, изображение примет вид $f(p) = \frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$.

$$9. \text{Затухающая косинусоида } f(t) = e^{-\alpha t} \cos(wt), f(p) = \frac{(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}.$$

$$10. \text{Запаздывающее экспоненциальное колебание } f(t) = E e^{-\alpha(t-\tau)} = E e^{\alpha\tau} e^{-\alpha t}.$$

Интегрирование проводится только по переменной t , поэтому выражение

$$E e^{\alpha\tau} \text{ выносится за знак интегрирования } f(p) = E e^{\alpha\tau} \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = E e^{\alpha\tau} \frac{1}{p+\alpha}.$$

Изображение информации в общем виде можно записать так

$$f(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

где $A(p), B(p)$ полиномы.

а) корни $A(p)$ называются нулями

б) корни $B(p)$ называется полюсами на p - плоскости (зависимость $j\omega$ от σ).

Нули, полюса – особые точки.

Они нужны: во-первых для восстановления формы изображения с точностью до постоянного множителя; во-вторых, полюса входят в формуле вычетов.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} f(p) e^{pt} dp.$$

$$\text{Вычет } f(p) e^{pt} = \frac{A(p) e^{pt}}{B(p)} = \frac{A(p) e^{pt}}{B'(p)} \Big|_{p_1} + \frac{A(p) e^{pt}}{B'(p)} \Big|_{p_2} + \dots + \frac{A(p) e^{pt}}{B'(p)} \Big|_{p_n}, \text{ где}$$

p_1, p_2, p_n - полюса.

Контрольная работа №1

Преобразование Лапласа

Вариант №1

1. Одна из 2-х основных формул преобразования Лапласа

$$1.1. f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$1.2. f(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$1.3. f(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{pt} dt$$

$$1.4. f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{pt} dt$$

2. Дано: $f(t) = e^{\alpha t}$, где α – постоянное число. Найти изображение.

$$2.1. f(p) = \frac{1}{p+\alpha}$$

$$2.2. f(p) = \frac{1}{p-\alpha}$$

$$2.3. f(p) = \frac{\alpha}{p}$$

$$2.4. f(p) = -\frac{\alpha}{p}$$

3. Дано: $f(t) = t^3$. Найти изображение

$$3.1. f(p) = \frac{1}{p^3}$$

$$3.2. f(p) = \frac{1}{p^4}$$

$$3.3. f(p) = \frac{3}{p^4}$$

$$3.4. f(p) = \frac{6}{p^3}$$

4. Дано: $f(t) = \cos(wt)$. Найти изображение.

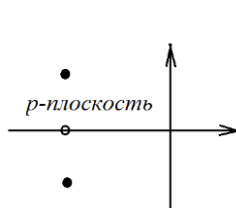
$$4.1. f(p) = \frac{p}{p^2+w^2}$$

$$4.2. f(p) = \frac{w}{p^2+w^2}$$

$$4.3. f(p) = \frac{1}{p^2+\alpha^2}$$

$$4.4. f(p) = \frac{1}{p^2+w^2}$$

5. Даны на p -плоскости 3 особые точки. Аналитически записать вид изображения с точностью до постоянного множителя



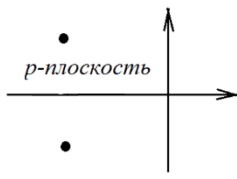
$$5.1. f(p) = \frac{1}{(p-\alpha)^2+w^2}$$

$$5.2. f(p) = \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+w^2}$$

$$5.3. f(p) = \frac{1}{(p+\alpha)^2+w^2}$$

$$5.4. f(p) = \frac{p-\alpha}{(p+\alpha)^2+w^2}$$

6. Даны на p -плоскости 2 особые точки. Аналитически записать вид изображения с точностью до постоянного множителя



$$6.1. f(p) = \frac{\alpha}{p^2 + w^2}$$

$$6.2. f(p) = \frac{1}{(p + \alpha)^2 + w^2}$$

$$6.3. f(p) = \frac{\alpha}{(p + \alpha)^2 + w^2}$$

$$6.4. f(p) = \frac{-\alpha}{p^2 + w^2}$$

$$6.5. f(p) = \frac{1}{(p - \alpha)^2 + w^2}$$

$$6.6. f(p) = \frac{-\alpha}{(p - \alpha)^2 + w^2}$$

7. Если изображение $\Pi(p) = \frac{E}{p^2 + w^2}$, то оригинал $U(t)$ по формуле вычетов равняется:

$$7.1. U(t) = \frac{E}{(p^2 + w^2)'} \Big|_{p_s}$$

$$7.2. U(t) = \sum_{s=1}^2 \frac{E}{(p^2 + w^2)'} \Big|_{p_s}$$

$$7.3. U(t) = \sum_{s=1}^2 \frac{E e^{p_s t}}{(p^2 + w^2)'} \Big|_{p_s}$$

$$7.4. U(t) = \sum_{s=1}^2 \frac{(E e^{p_s t})'}{(p^2 + w^2)'} \Big|_{p_s}$$

8. Найти оператор Лапласа $L \left[U(t) = \int_0^t f(t) dt \right]$, если $U(0) = 0$.

$$8.1. p \cdot f(p)$$

$$8.2. \frac{f(p)}{p}$$

$$8.3. p \cdot f(p) - f(0)$$

$$8.4. \frac{f(p)}{p} - f(0)$$

9. Оператор Лапласа $L \left[\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau \right]$ равняется:

$$9.1. f_1(p) \cdot f_2(p)$$

$$9.2. \frac{f_1(p) \cdot f_2(p)}{p}$$

$$9.3. f_1(p) \cdot f_2(p + \tau)$$

$$9.4. p \cdot f_1(p) \cdot f_2(p)$$

Вариант №2

1. Одна из 2-х основных формул преобразования Лапласа

$$1.1. f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\sigma+j\infty} f(p)e^{pt} dp$$

$$1.2. f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\sigma+j\infty} f(p)e^{-pt} dp$$

$$1.3. f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} f(p)e^{pt} dp$$

$$1.4. f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} f(p)e^{-pt} dp$$

2. Дано: $f(t) = e^{\alpha t}$, где α – постоянное число. Найти изображение.

$$2.1. f(p) = \frac{1}{p+\alpha}$$

$$2.2. f(p) = \frac{1}{p-\alpha}$$

$$2.3. f(p) = \frac{\alpha}{p}$$

$$2.4. f(p) = -\frac{\alpha}{p}$$

3. Дано: $f(t) = t^2$. Найти изображение

$$3.1. f(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$3.2. f(p) = \frac{1}{p^3}$$

$$3.3. f(p) = \frac{2}{p^2}$$

$$3.4. f(p) = \frac{2}{p^3}$$

4. Дано: $f(t) = \sin(wt)$. Найти изображение.

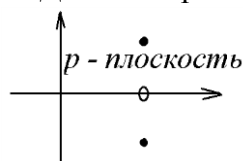
$$4.1. f(p) = \frac{p}{p^2+w^2}$$

$$4.2. f(p) = \frac{w}{p^2+w^2}$$

$$4.3. f(p) = \frac{1}{p^2+\alpha^2}$$

$$4.4. f(p) = \frac{1}{p^2-w^2}$$

5. Даны на p -плоскости 3 особые точки. Аналитически записать вид изображения с



точностью до постоянного множителя

$$5.1. f(p) = \frac{1}{(p-\alpha)^2+w^2}$$

$$5.2. f(p) = \frac{1}{(p+\alpha)^2+w^2}$$

$$5.3. f(p) = \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+w^2}$$

$$5.4. f(p) = \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+w^2}$$

6. Даны на p -плоскости 2 особые точки. Аналитически записать вид изображения с точностью до постоянного множителя



$$6.1. f(p) = \frac{1}{(p+\alpha)^2+w^2}$$

$$6.2. f(p) = \frac{1}{(p-\alpha)^2+w^2}$$

$$6.3. f(p) = \frac{\alpha}{p^2+w^2}$$

$$6.4. f(p) = \frac{-\alpha}{p^2+\alpha^2}$$

$$6.5. f(p) = \frac{\alpha}{(p+\alpha)^2+w^2}$$

$$6.6. f(p) = \frac{-\alpha}{(p-\alpha)^2+w^2}$$

7. Если изображение $\Pi(p) = \frac{Ep}{p^2+w_0^2}$, то оригинал $U(t)$ по формуле вычетов равняется:

$$7.1. U(t) = \sum_{s=1}^3 \frac{Epe^{pt}}{(p^2+w_0^2)^s} \Big|_{p_s}$$

$$7.2. U(t) = \sum_{s=1}^2 \frac{Epe^{pt}}{(p^2+w_0^2)^s} \Big|_{p_s}$$

$$7.3. U(t) = \sum_{s=1}^3 \frac{Ep}{(p^2+w_0^2)^s} \Big|_{p_s}$$

$$7.4. U(t) = \sum_{s=1}^2 \frac{Ep}{(p^2+w_0^2)^s} \Big|_{p_s}$$

8. Найти оператор Лапласа $L \left[\frac{dU(t)}{dt} \right]$

$$8.1. p \cdot \Pi(p)$$

$$8.2. \frac{\Pi(p)}{p}$$

$$8.3. p \cdot \Pi(p) - U(0)$$

$$8.4. \frac{\Pi(p)}{p} - U(0)$$

9. Оператор Лапласа $L \left[\frac{d}{dt} \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau \right]$ равняется:

$$9.1. f_1(p) \cdot f_2(p)$$

$$9.2. \frac{f_1(p) \cdot f_2(p)}{p}$$

$$9.3. p \cdot f_1(p) \cdot f_2(p)$$

$$9.4. p \cdot f_1(p + \tau) \cdot f_2(p)$$

Контрольная работа №2

Преобразование Лапласа

1. Пользуясь методом вычетов, найдите колебание $u(t)$, изображение которого

$$\Pi(p) = \frac{w_0}{p^2 + w_0^2}.$$

2. Через формулу изображения синуса найдите оригинал $u(t)$ изображения $\Pi(p) =$

$$\frac{1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}, \text{ где } a_0, a_1, a_2 - \text{ постоянные числа. Для компактной записи ответа}$$

$$\text{используйте обозначения } \alpha = \frac{a_1}{2a_0}; b^2 = \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{4a_0^2}.$$

3. Дано уравнение второго порядка $a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = x(t)$. Действующая сила $x(t)$ и начальные условия $y(t=0) = y_0$, $y'(t=0) = y_1$ известны. Найти формулу изображения $Y(p)$ через $X(p)$. Можно ли записать передаточный коэффициент $K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ в явном виде?

4. Определите оригиналы 3 изображений

$$4.1. f(p - \alpha)$$

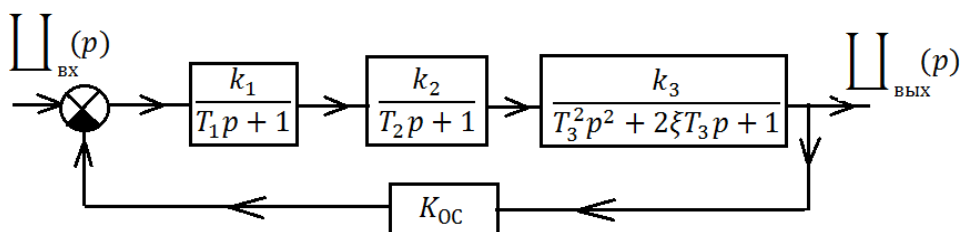
$$4.2. f(a \cdot p)$$

$$4.3. \frac{1}{b} f\left(\frac{p}{b}\right), \text{ где } \alpha, a, b \text{ являются постоянными числами.}$$

5. Используя результаты примера №4 и формулу (интеграл) Дюамеля, найдите изображение следующего оригинала $y(t) = \int_0^t \frac{1}{a_0 b} e^{\alpha \tau} \cdot \sin(b\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau$, где a_0, b, α – постоянные числа.

Контрольная работа №3

1. Задана структурная схема САР



Численные значения параметров следующие:

$$T_1 = 0,15 \text{ с}$$

$$\xi = 0,44$$

$$T_2 = 0,08 \text{ с}$$

$$k_1 = 3$$

$$T_3 = 0,04 \text{ с}$$

$$k_2 = 10$$

$$k_3 = 0,3$$

$$k_{oc} = 0,1$$

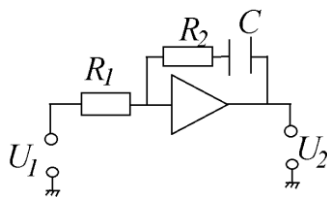
Найти: 1. Уравнение модели.

2. Передаточную функцию разомкнутой цепи $W_p(p)$.

3. Передаточную функцию замкнутой цепи $W_3(p)$.

4. Коэффициент передачи $W_p(j\omega)$ для разомкнутой цепи.

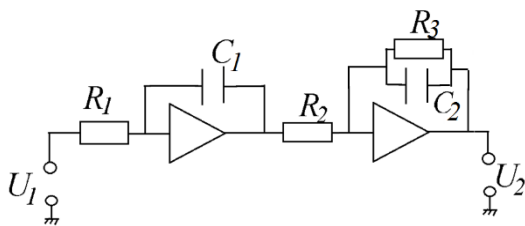
2. Дано изодромное звено вида



R_1, R_2, C известны. Написать уравнение модели и найти передаточный коэффициент. Используйте обозначения $T_2 = R_2 C; T_1 = R_1 C$.

Нарисуйте другую структурную схему, которая по общему

виду передаточного коэффициента была бы такой же.



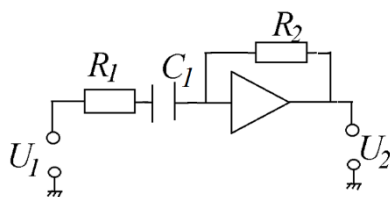
3. Дано инерционное интегрирующее звено.

Сопротивления и емкости известны. Используйте обозначения

$$T_1 = R_1 \cdot C_1, T_2 = R_3 \cdot C_2.$$

Написать уравнение модели и найти передаточный коэффициент. Определите особые точки (нули полюса)

4. Дано дифференцирующее звено вида



R_1, R_2, C известны. Определите особые точки на p -плоскости.

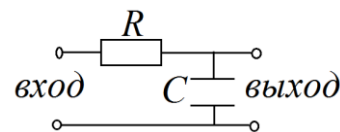
Используйте обозначения $T_1 = R_1 \cdot C, T_2 = R_2 \cdot C$.

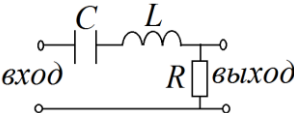
Написать уравнение модели и найти передаточный коэффициент. Определите особые точки на p -плоскости.

Контрольная работа №4

Передаточная функция, вычеты

1. Используя понятие вычетов, найдите переходную функцию $h(t)$.



2.  1) Определите коэффициент передачи: $\dot{K}(j\omega)$;

2) Найдите передаточную функцию (коэффициент) $K(p)$. Укажите особые точки.

3) Запишите общую формулу амплитудно-частотной характеристики $|\dot{K}(j\omega)|$ и ФЧХ $\rightarrow \varphi(\omega)$.

4) Найдите $|\dot{K}(j\omega)|$, если $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

5) Найдите ФЧХ $\varphi(\omega)$, если $\omega = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$.

При решении данной задачи используйте вспомогательные обозначения $T_0^2 = LC$; $T = RC$.

3. Используя понятие вычетов, найдите переходную функцию $h(t)$ неустойчивого звена с передаточной функцией $K(p) = \frac{5}{0,1p-1}$. Построить график переходной функции $h(t)$. Укажите особые точки $K(p)$.
4. Какое динамическое звено имеет импульсную характеристику (функцию веса) $g(t) = 50(e^{-5t} - e^{-10t}) \cdot 1(t)$. Записать выражение передаточной функции $K(p)$, указать особые точки на p -плоскости.

Контрольная работа №5

Переход от $K(p)$ к $h(t)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ на примерах А-, П-, И- звеньев

1. Дается А-звено, которому соответствует дифференциальное уравнение вида $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t)$, где T, k – постоянные величины. Через передаточный коэффициент $K(p)$ найти амплитудно-частотную $A(\omega)$, фазо-частотную $\varphi(\omega)$ и переходную $h(t)$ характеристики линейного 4-х полюсника. Результаты предоставить и в виде графиков. Нарисуйте схему четырехполюсника. Начальные условия по $y(t)$ нулевые.
2. Дается пропорциональное П-звено, которому соответствует уравнение вида $y(t) = k \cdot x(t)$, где k известное постоянное число. Через передаточный коэффициент $K(p)$ найти

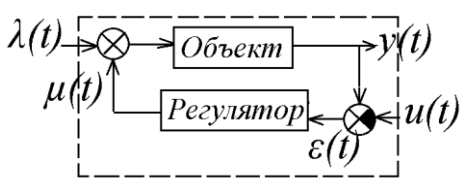
амплитудно-частотную $A(w)$, фазо-частотную $\varphi(w)$ и переходную $h(t)$ характеристики линейного 4-х полюсника. Результаты предоставить и в виде графиков. Нарисуйте схему четырехполюсника. Начальные условия по $y(t)$ нулевые.

3. Дается И-звено, которому соответствует дифференциальное уравнение вида $T \frac{dy(t)}{dt} = k \cdot x(t)$, где T, k - известные постоянные числа. Через передаточный коэффициент $K(p)$ найти амплитудно-частотную $A(w)$, фазо-частотную $\varphi(w)$ и переходную $h(t)$ характеристики линейного 4-х полюсника. Результаты предоставить и в виде графиков. Нарисуйте схему четырехполюсника. Начальные условия по $y(t)$ нулевые.

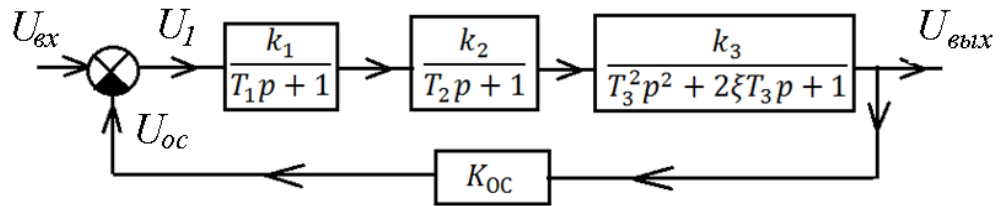
Контрольная работа №6

Уравнения модели, дифференциальные уравнения, коэффициент передачи и передаточная функция разомкнутых и замкнутых систем.

1.  Найти передаточную функцию замкнутой системы автоматического регулирования по каналу заданного значения регулируемой величины $u(t)$, если дифференциальное уравнение объекта регулирования $T_2^2 y''(t) + T_1 y'(t) + y(t) = k \cdot \mu(t)$, а дифференциальное уравнение регулятора $\mu'(t) = -k_p \left\{ [y'(t) - u'(t)] + \frac{1}{T_{ин}} [y(t) - u(t)] + T_{пр} [y''(t) - u''(t)] \right\}$.

2.  В системе автоматического регулирования объект описывается дифференциальным уравнением $T y'(t) + y(t) = k_1 \lambda(t) + k_2 \mu(t)$. Дифференциальное уравнение регулятора имеет вид $\mu'(t) = - \left[k_p \varepsilon'(t) + \frac{k_p}{T_{ин}} \varepsilon(t) \right]$, где $\varepsilon(t)$ - сигнал рассогласования, определяющийся разностью между регулируемой величиной $y(t)$ и ее заданным значением $u(t)$. Найти передаточную функцию замкнутой системы по каналу: возмущающее воздействие $\lambda(t)$ - регулируемая величина $y(t)$.

3.



Структурная схема САР

Численные значения параметров следующие:

$$T_1 = 0,15 \text{ с},$$

$$\xi = 0,44,$$

$$T_2 = 0,08 \text{ с},$$

$$k_1 = 3,$$

$$T_3 = 0,04 \text{ с},$$

$$k_2 = 10,$$

$$k_3 = 0,8,$$

$$k_{oc} = 0,1.$$

Найти следующие величины:

1. Коэффициент передачи $W(j\omega)$ разомкнутой цепи.
2. Написать уравнение модели.
3. Написать дифференциальное уравнение системы разомкнутой цепи.
4. Написать дифференциальное уравнение системы замкнутой цепи.

3. О системах автоматического регулирования

Все шире применяется автоматизация различных процессов, оказывая большое внимание на совершенствование методов научных исследований, реализацию сложнейших технических задач.

Теория автоматического управления и регулирования изучает принципы построения, методы анализа и синтеза наиболее широкого класса автоматических систем. Отличие систем автоматического регулирования от других систем заключается в том, что характер процессов (или способ действий) зависит от выходного результата, информация о котором по цепи обратной связи подается ко входу системы.

Для линейных динамических звеньев определены характеристики, посредством которых исследуются процессы, протекающие в системе, разработаны методы оценки качества переходных процессов, динамической точности линейных систем, находящихся под действием случайных возмущающих воздействий, заданных статистически.

Методы же исследования нелинейных систем не являются общими: они позволяют решать лишь отдельные задачи анализа нелинейных систем автоматического регулирования.

Принципы управления (регулирования) имеют универсальный характер. Например, принцип обратной связи присущ регуляционным системам живых организмов, системам управления производством, обществом и так далее. Поэтому, изучение принципов (теории) автоматического регулирования (управления) в настоящее время становится необходимым для специалистов не только в области автоматики, но и других направлений.

Изучение курса «Системы автоматического регулирования» кроме классического математического аппарата физики, требует знания преобразования Лапласа.

3.1. Применение операционного исчисления и теории функций комплексного переменного

Основные формулы преобразования Лапласа

$$L[f(t)] = f(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt - \text{изображение.} \quad (1)$$

Формулу (1) иногда записывают так

$$f(p) = L[f(t)], \quad (2)$$

где L – оператор Лапласа.

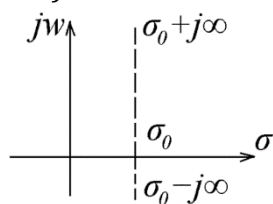
$p = \sigma + j\omega$ - комплексное переменное

σ – константа, ω - круговая частота.

Оригинал ищется по обратной формуле

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} f(p) e^{pt} dp, \quad (3)$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.



Линия интегрирования дана на p – плоскости.

3.2. Общая схема решения задач методом Лапласа

Методика решения задач преобразованием Лапласа обычно состоит из 4-х этапов:

- 3.2.1. Пишется дифференциально-интегральное уравнение по времени t относительно оригинала $f(t)$.
- 3.2.2. Каждый член вышенаписанного уравнения по t подвергается воздействию оператора Лапласа (уравнения (1) или (2)). Полученное уравнение относительно изображения $f(p)$ бывает сравнительно простой.
- 3.2.3. С учетом постановки реальных начальных условий по времени ищется решение уравнения относительно изображения $f(p)$.
- 3.2.4. Зная изображение $f(p)$, по обратному преобразованию Лапласа (см. формулу (3)), определяется оригинал $f(t)$.

3.3. Методы расчета систем автоматического регулирования с использованием преобразования Лапласа

- 3.3.1. Пишется дифференциально-интегральное уравнение по времени t , содержащее оригиналы по входному и по выходному сигналам САР.
- 3.3.2. Каждое выражение вышенаписанного уравнения по t подвергается воздействию оператора Лапласа (формулы (1) или (2)). Другими словами, переходим к комплексной переменной. Получается уравнение, содержащее изображение и входного и выходного сигналов 4-х полюсника.
- 3.3.3. Определяем передаточный коэффициент $k(p)$. Передаточная функция является основным исходным математическим описанием линейных непрерывных САР. Передаточной функцией элемента (или системы) называется отношение изображения по Лапласу выходной величины элемента (или системы) к изображению его входной величины при нулевых начальных условиях.
- 3.3.4. Расчет различных динамических характеристик.

3.3.4.1. Расчет АЧХ, ФЧХ

а) В формуле $k(p)$ переменную p заменяем через частоту, т.е. $p = j\omega$. Тогда получаем коэффициент передачи $\dot{k}(j\omega)$.

б) Коэффициент передачи преобразуем к виду $\dot{k}(j\omega) = k_r(\omega) + jk_i(\omega)$.

в) АЧХ $\rightarrow A(\omega) = \sqrt{k_r^2(\omega) + k_i^2(\omega)}$.

г) ФЧХ $\rightarrow \varphi(\omega) = -\arctg \frac{k_i(\omega)}{k_r(\omega)}$.

3.3.4.2. Расчет переходной характеристики $h(t)$.

а) Ищем сначала изображение по формуле $h(p) = \frac{k(p)}{p}$ (для линейных четырехполюсников).

б) По обратной формуле Лапласа (3) определяем оригинал переходной функции

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{k(p)}{p} e^{pt} dp.$$

Такие интегралы обычно берутся по правилам вычетов, используя полюса.

3.3.4.3 Расчет импульсной характеристики системы $g(t)$

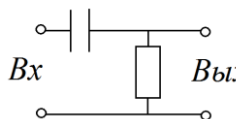
а) В формуле $k(p)$ переменную p заменяем через частоту, т.е. $p = j\omega$. Тогда получаем коэффициент передачи $\dot{k}(j\omega)$.

В линейных САР коэффициент передачи не зависит от величины $x_{\text{вх}}$, поэтому его можно определять не по отношению приращений, а по отношению самих

$$\text{величин } k = \frac{x_{\text{вых}}}{x_{\text{вх}}} \text{ или } k = \frac{\Delta x_{\text{вых}}}{\Delta x_{\text{вх}}}.$$

б) По формуле Фурье $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{k}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$.

3.3.4.4. Зная $\dot{k}(j\omega)$ можно записать дифференциальное уравнение цепочки по t



$$\dot{k}(j\omega) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} \rightarrow RC \frac{dy}{dt} + y(t) = RC \frac{dy(t)}{dt}.$$

3.3.5. Проверка устойчивости системы

Есть другой вариант расчета импульсной характеристики САР: зная $k(p)$, можно сразу найти импульсную характеристику $g(t)$.

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} k(p) e^{pt} dp.$$

Эти интегралы также берутся по правилам вычетов, используя соответствующие полюса.

3.4. Правила дифференцирования и интегрирования в области изображений

1. Если оригинал соответствует производной $\frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t)$, то изображение

$$\int_0^\infty f^{(n)}(t) e^{-pt} dt = p^n \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt - \sum_{\mu=0}^{n-1} p^{n-1-\mu} f^{(\mu)}(0) \quad (1)$$

или
$$L[f^{(n)}(t)] = p^n L[f(t)] - \sum_{\mu=0}^{n-1} p^{n-1-\mu} f^{(\mu)}(0), \quad (2)$$

где $L[f(t)] = f(p)$. (3)

Если $n = 1$, т.е. первое производное

$$L[f^{(1)}(t)] = p \cdot f(p) - f(t=0), \quad (4)$$

где $f(t) = f(0)$ – начальное условие.

Если начальное условие нулевое, то дифференцирование по t в области функций комплексного переменного заменяется произведением p на изображение $f(p)$.

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p \cdot f(p). \quad (5)$$

В системах автоматического регулирования (САР) обычно используются формулы вида (5).

4. Если оригинал соответствует интегралу n -й степени, то

$$L[\int \dots \int f(t) (dt)^n] = \frac{L[f(t)]}{p^n} + \frac{f_{-1}}{p^n} + \frac{f_{-2}}{p^{n-1}} + \dots + \frac{f_{-n}}{p}, \quad (6)$$

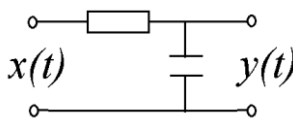
где начальные условия

$$f_{-n} = \int f(t) (dt)^n|_{t=0}. \quad (7)$$

Если начальные условия равны 0, то интегрирование по t в области функций комплексного переменного заменяется делением.

Для $n = 1$

$$L[f(t)dt] = \frac{f(p)}{p} \quad (8)$$



Пример 1. Найти коэффициент передачи $k(j\omega)$, передаточную функцию $k(p)$, изображение $h(p)$. Оригинал $h(t)$ переходной функции определяется методом вычетов. Определите $y(t)$, если $x(t)$,

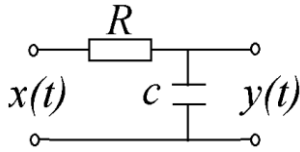
R, C известны.

$$1) \quad k(j\omega) = \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

$$2) \quad k(p) = \frac{1}{1 + pRC}.$$

$$3) \quad h(p) = \frac{k(p)}{p} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{1}{RC}\right)}.$$

$$4) \quad h(t) = \frac{1}{RC} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{e^{pt}}{p(p + \frac{1}{RC})} dp = \frac{1}{RC} \text{Выг} \frac{e^{pt}}{p(p + \frac{1}{RC})} \bigg|_{p_1} = \frac{1}{RC} \left\{ \frac{e^{pt}}{2p + \frac{1}{RC}} \bigg|_{p_1=0} + \right. \\ \left. \frac{e^{pt}}{2p + \frac{1}{RC}} \bigg|_{p_2 = -\frac{1}{RC}} \right\} = 1 - e^{-t/RC}.$$



Пример 2. Найти дифференциальное уравнение RC-цепочки через $k(p)$. Записать изображение входного сигнала $X(p)$ через $Y(p)$.

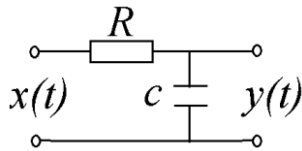
$$k(j\omega) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{j\omega RC + 1},$$

$$y(t)[j\omega RC + 1] = x(t);$$

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t).$$

$$Y(p)[pRC + 1] = X(p).$$

Пример 3.



1. Найти $k(j\omega)$, $k(p)$, дифференциальное уравнение

2. Найти $k(j\omega)$, $k(p)$, $h(p)$, $h(t)$.

$$1. \quad k(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1}$$

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} \rightarrow y(t)[j\omega RC + 1] = j\omega RC x(t)$$

$$RC \frac{dy}{dt} + y(t) = RC \frac{dx(t)}{dt}.$$

$$k(p) = \frac{pRC}{pRC + 1} = \frac{p}{p + \frac{1}{RC}}.$$

$$\frac{y(p)}{x(p)} = \frac{p}{p + \frac{1}{RC}},$$

$$y(p) \left[p + \frac{1}{RC} \right] = p \cdot x(p),$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{dx}{dt}.$$

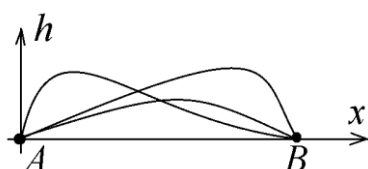
$$2. \quad k(j\omega) = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} \rightarrow k(p) = \frac{pRC}{pRC + 1} = \frac{p}{p + \frac{1}{RC}}$$

$$h(p) = \frac{k(p)}{p} = \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}, \quad h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \frac{e^{pt}}{p + \frac{1}{RC}} dp = \frac{e^{pt}}{1} \bigg|_{p = -\frac{1}{RC}} = e^{-t/RC}.$$

3.5. Основные понятия систем автоматического регулирования (САР)

Управление – любое осуществление воздействий на физический объект или систему для достижения поставленной цели.

Задача управления – устранение или уменьшение отклонения выходной величины от требуемого значения. Эта задача сводится к нахождению необходимой зависимости воздействия на вход объекта от возмущающих воздействий, изменения требуемого значения выходной величины и характеристик объекта, и реализации этой зависимости.



Управление, которое своевременно само учитывает изменяющиеся условия работы объекта, называется автоматическим.

Цель управления – попасть из A в B .

Целевая функция (расход топлива) – критерий оптимального управления. Min расхода топлива.

Регулирование – частный случай управления.

- 1) Имеет более простые цели:
 - а) Стабилизация параметров.
 - б) Программное изменение параметров.
- 2) Используется текущая информация о состоянии объекта (системы).

Система – часть физической установки, мысленно выделенная для изучения.

Модель системы – информация о свойствах системы, полученная в результате ее изучения и представленная в виде, удобном для воспроизводства и повторения этих свойств.

Динамическая система – система, свойства которой заметно меняются с течением времени (под действием внешних причин).

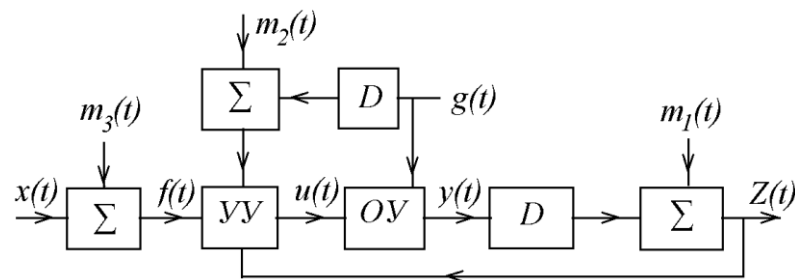
Синтез – выбор структуры и параметров САР, обеспечивающих наилучшее выполнение задачи регулирования.

3.6. Функциональная схема САР в общем виде

Составление схем САР и их анализ производится в следующем порядке:

1. Составление функциональной схемы $\rightarrow$ структурной схемы.
2. Анализ полученной передаточной функции $k(p)$. Проводится исследование на устойчивость, качества процесса регулирования при различных воздействиях на систему.
3. Анализ точности системы, то есть вычисляются ошибки системы при заданном характере управляющих и возмущающих воздействий. Если нужно, то производится

оптимизация системы и устанавливаются возможности осуществления самонастройки в системе.



ОУ – объект (система) управления.

$u(t)$ - сигнал управления.

УУ – устройство управления (регулятор).

$x(t)$ - управляющее воздействие («входной сигнал»).

$y(t)$ - выходной сигнал ОУ – регулируемый сигнал.

$m_1(t), m_2(t), m_3(t)$ – шумы.

D - датчик.

$g(t)$ - возмущающее воздействие, случайный сигнал, связанный с изменением окружающей среды (температуры, давления, влажности и т.п.), колебаний напряжений источников питания.

$z(t)$ - сигнал обратной связи.

Предложенная функциональная схема САР является замкнутой системой или системой с обратной связью. За счет обратной связи (ОС) влияние на качество работы системы помех и нестабильности устройств в значительной степени компенсируются.

$e(t) = f(t) - z(t)$ называется *сигналом рассогласования или сигналом ошибки*. Устройство, которое измеряет $e(t)$ входит в УУ и называется измерителем рассогласования.

Разность $x(t) - z(t)$ называется ошибкой системы.

САР, построенные подобным образом, называются системами, работающими по принципу отклонения или рассогласования. Кроме того, предложенная нами система работает по принципу компенсации возмущающих воздействий, потому что в этой системе возмущающее воздействие измеряется датчиком D и используется для формирования сигнала управления $u(t)$.

$$u(t) = \Phi(x, y, m, g).$$

Совокупность предписаний, определяющих характер изменения выходной величины объекта управления $y(t)$ называется алгоритмом функционирования (управления):

1. Поддержание постоянства выходной величины $y(t)$, равной заданному (требуемому) значению;
2. Изменение выходной величины $y(t)$ по заданному закону (программе);
3. Изменение выходной величины $y(t)$ по заранее неизвестному закону.

Из этих трех пунктов 1 и 2 относятся и к САР, и к САУ (система автоматического управления). Третий пункт относится только к САУ.

Обратим внимание, что САР, в основном, состоит из ОУ (объекта системы управления) и автоматического УУ (управляющего устройства (регулятора)), взаимодействующих между собой в соответствии с алгоритмом функционирования.

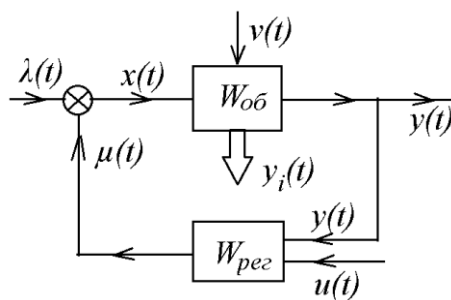
3.7. Принципиальная структурная схема автоматического регулирования (САР)

САР функционирует на основе автоматического измерения и дальнейшего преобразования входного сигнала, в качестве которого могут применяться различные параметры:

1. Электрическое напряжение в системах стабилизации источника питания.
2. Частота ω или фаза φ напряжения в системах автоматической подстройки частоты $\varphi \sim \omega t$.
3. Направление прихода радиолокационного сигнала в системах автоматического сопровождения станций по угловым координатам.

САР предназначены для автоматического (без активного вмешательства оператора) поддержания физических величин на определенном уровне или изменения их в соответствии с управляющими воздействиями. Линейные САУ исследуются методами Фурье и оператора Лапласа, которые являются широко освоенными для применения.

Для реализации САУ необходимо бывает вычислительное устройство, которое по измеренным значениям выходных величин ($y(t)$) вычисляет и устанавливает необходимое значение регулирующего воздействия ($\mu(t)$). Перейдем к более часто употребляемым обозначениям.



$W_{об}$ - объект (система) управления.

$W_{\text{рег}}$ - регулятор (устройство управления).

$x(t)$ - входной сигнал объекта.

$y(t)$ - регулируемая величина.

$\mu(t)$ - регулирующая величина.

$v(t), \lambda(t)$ - возмущающие воздействия.

$u(t)$ – задающее воздействие (программа).

$y_i(t)$ - сигналы по другим каналам.

Стремимся к цели $y(t) \approx u(t)$.

1. $y(t) - u(t) = \min$ - наилучший случай (наше стремление).

Но оценка качества без указания момента времени неудобна.

2. $y(t) - u(t) = \varepsilon(t)$ - величина рассогласования.

Есть 2 метода оценки критерия качества:

1) Линейный интегральный критерий

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(t) dt \rightarrow \min. \text{ сохраняется отрицательный или положительный знак.}$$

2) Среднеквадратичный интегральный критерий

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \rightarrow \min. \text{ Всегда положительная величина.}$$

3.8. Математическая постановка основной задачи теории регулирования

Для решения основной задачи регулирования необходимо знать взаимосвязь между входными и выходными значениями объекта.

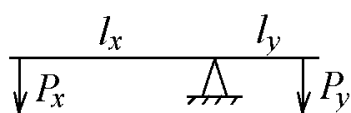
Уравнения динамики обычно стараются устанавливать связь между выходами и входами.

Динамический оператор связи F (оператор преобразования) – математическая модель системы.

$$y(t) = F\{x(t), v(t)\}.$$

Значит, если знаем вид функции оператора преобразования F , то задача регулирования решается.

Примеры (аналоги)



1. Обычный рычаг

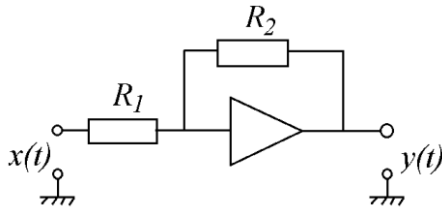
Если $x(t)$ и $y(t)$ имеют размерности сил, то выполняется закон рычага $P_x l_x = P_y l_y$. Если $x(t)$ условно считаем входом, а $y(t)$

- выходом, то оператор преобразования $F = \frac{P_y}{P_x} = \frac{l_x}{l_y} = k$.

2. Усилитель НЧ: $x(t)$ – входной сигнал, $y(t)$ - выходной сигнал.

Оператор преобразования усилителя НЧ равняется коэффициенту усиления k

$$F = \frac{y(t)}{x(t)} = k.$$



3. Операционный усилитель (ОУ)

ОУ называют усилитель постоянного тока, который предназначен для работы с глубокой отрицательной обратной связью. Используется для выполнения ряда математических операций над входным сигналом (умножения на постоянный коэффициент, суммирования, вычитания, интегрирования, дифференцирования, фильтрации, нелинейного преобразования и др.)

В идеале:

- а) бесконечно большой коэффициент усиления в неограниченной частотной полосе пропускания,
- б) бесконечно большое входное сопротивление,
- в) бесконечно малое выходное сопротивление
- г) обеспечивает выходное напряжение, равное нулю, при нуле на входе,
- д) не потребляет от входной цепи какого-либо тока.

$F = \frac{y(t)}{x(t)} \approx k \cong -\frac{R_2}{R_1}$. Коэффициент усиления операционного усилителя k может достигать до 5000 при входном сопротивлении $R_{вх} \sim 1000 \text{ МОм}$.

3.9. Замечания о нелинейности САР

Теперь обсудим случай нелинейной системы, то есть нелинейного объекта $W_{об}$.

Благодаря нелинейностям объекта, свойства САР меняются: появляются автоколебания с устойчивой амплитудой, имеет место наличие нескольких состояний равновесия, характер переходных процессов зависит от начальных условий, захват и срыв сложения возможно только в системах с нелинейными элементами. К нелинейным системам неприменим принцип суперпозиции: реакция нелинейной системы не равна сумме реакций на отдельные воздействия. Эти системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, что существенно усложняет их анализ.

В настоящее время нет общей теории анализа нелинейных САР. Разработанные методы (фазового пространства, кусочно-линейной аппроксимации, гармонической и статистической линеаризации, моделирования) позволяют решать лишь отдельные задачи.

Общий подход к теории анализа нелинейных САР должен сопровождаться следующими задачами:

1. Найти способ нахождения функции передачи нелинейной системы.
2. Исследовать условия возникновения автоколебаний, устойчивости их параметров (амплитуды и частоты).
3. Определить состояния равновесия нелинейной системы и исследовать их на устойчивость.
4. Определить зависимость характера переходного процесса от начальных условий.
5. Пользуясь дискриминационными характеристиками, необходимо оценить условия, при которых наступает срыв сложения.
6. Учесть воздействия различных помех, снижающих качество работы систем.
7. Оценить ошибки определения величин.

Но все это, как бы, исследование только внешних проявлений нелинейности (следствий), а не причин.

В радиоэлектронике нелинейными элементами чаще всего являются полупроводниковые приборы – диоды, биполярные и полевые транзисторы. Например, у диода между слоями объемных зарядов возникает контактная разность потенциалов. Электрическое поле, связанное с контактной разностью потенциалов, зависит от напряжения, которое прикладывается к диоду.

Именно в наличии этого электрического поля, зависящего от внешней разности потенциалов, и заключена причина нелинейности диода. Необходимо исследовать изменение электрического поля (связанного с объемным зарядом), которое будет происходить при подаче внешней разности потенциалов. А это является достаточно сложной задачей, поскольку современное мировоззрение не позволяет образно и точно представить структуру электрического поля.

Для создания общей теории анализа нелинейных САР наиболее предпочтительны 2 способа описания нелинейностей:

1. Метод эквивалентных схем нелинейных полупроводниковых приборов, что частично применяется на практике.
2. Метод сплошной среды для описания электрического поля объемных зарядов, как причины нелинейности.

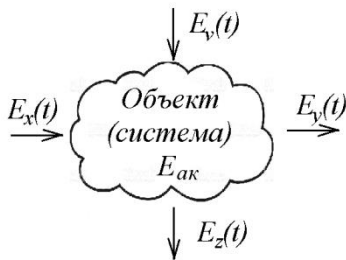
И того, можно сделать следующее заключение. Имеющиеся методы, так или иначе, сводятся к попытке линеаризации, оставляя в тени причины нелинейности радиоэлектронных устройств. Вопрос сводится к нахождению функции передачи (динамического оператора связи F) нелинейной системы, что невозможно без знания физики самой нелинейности.

3.10. Пример аналитического подхода к изучению динамики объекта

Имеют место 2 подхода: а) аналитический,

б) экспериментальный.

В основе аналитического подхода лежат общие законы сохранения энергий, масс и количества движения.



E_x - энергия входа,

E_y - энергия выхода,

E_v, E_z - энергии по другим каналам.

Можно перейти к мощностям – текущим мгновенным значениям подвода энергии.

$$N_x = N_y + \frac{dE_{ак}}{dt} + \sum N_{прочее}, \quad (1)$$

где N_x - скорость подвода энергии,

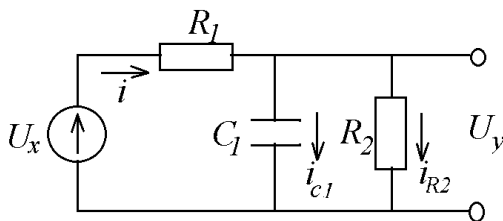
N_y - скорость отвода энергии,

$\sum N_{прочее}$ - мощности по другим каналам

$\frac{dE_{ак}}{dt}$ - аккумулированная мощность в объект.

В основе аналитического изучения динамики лежит разбиение сложных на простейшие элементы, для которых функции $E_{ак}$ записываются достаточно просто.

Пример:



R_2 - потребитель (нагрузка),

C_1 – аккумулирует энергию.

Через R_2 отводится энергия.

R_1 – выполняет роль другого канала.

Запишем уравнение по мощности:

$$iU_x = iU_{R1} + iU_y \quad (2) \text{ или более развернуто}$$

$$iU_x = iU_{R1} + i_{C1}U_y + i_{R2}U_y \quad (3). \text{ Под (3) запишем (1):}$$

$$N_x = N_{прочее} + \frac{dE_{ак}}{dt} + N_y \quad (1).$$

iU_x - скорость подвода энергии,

iU_{R1} - мощность по другому каналу,

$i_{C1}U_y$ – аккумулированная мощность в объект,

$i_{R2}U_y$ - скорость отвода энергии.

Теперь запишем уравнения по напряжениям (для определения передаточного коэффициента):

$$\text{Из (2)} \rightarrow U_x = U_{R1} + U_y \text{ или } U_x = iR_1 + U_y \quad (4) \rightarrow$$

$$U_x = (i_{C1} + i_{R2})R_1 + U_y. \quad (5)$$

$$U_x = \left\{ C_1 \frac{dU_y}{dt} + \frac{U_y}{R_2} \right\} R_1 + U_y. \quad (6)$$

$$U_x = R_1 C_1 \frac{dU_y}{dt} + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) U_y. \quad (7) \text{ или}$$

$$k_1 U_x(t) = T \frac{dU_y(t)}{dt} + U_y(t). \quad (8)$$

переходим к изображениям, считая $U_y(0) = 0$

$$k_1 \sqcup_x(p) = T_p \sqcup_y(p) + \sqcup_y(p), \quad (9)$$

$$\text{где } k_1 = \frac{1}{\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1.$$

(8) – обыкновенное дифференциальное уравнение с сосредоточенными параметрами (А – звено)

(9) – уравнение по изображениям.

Можно сразу искать

$$\dot{k}(j\omega) = \frac{\dot{Z}_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{\dot{Z}_{\text{ВХ}}(\omega)}, \text{ где}$$

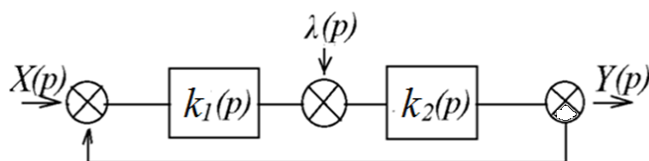
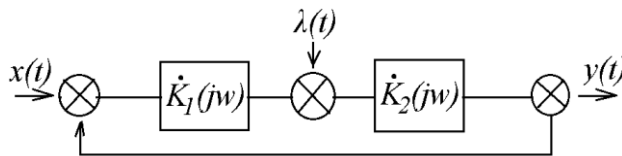
$$1) \frac{1}{\dot{Z}_{\text{ВЫХ}}(\omega)} = j\omega C_1 + \frac{1}{R_2} = \frac{1 + j\omega R_2 C_1}{R_2}$$

$$\dot{Z}_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_1}.$$

$$2) \dot{Z}_{\text{ВХ}}(t) = R_1 + \dot{Z}_{\text{ВЫХ}}(t) = R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_1}.$$

$$K(p) = \frac{\sqcup_y(p)}{\sqcup_x(p)} = \frac{k_1}{T_p + 1}. \quad (10) \text{ - А звено. Полус 1-го порядка в точке } p = -\frac{1}{T}.$$

3.11. Идея рассмотрения динамики встречно-параллельного соединения (САР)



Заданы передаточные функции отдельных звеньев, X и Y зависят от p . Система имеет несколько каналов рассмотрения: $x - y$, $\lambda - y$, $v - y$. Рассчитаем передаточные функции по отдельным каналам.

отдельным каналам.

1. Канал $x - y$. { $\begin{array}{c} \rightarrow \otimes \\ \uparrow \end{array}$ - суммирование; $\begin{array}{c} \rightarrow \ominus \\ \uparrow \end{array}$ - вычитание }

Выходной сигнал $Y(p)$ состоит из суммы 2-х составляющих:

$$Y(p) = X(p) \cdot k_1(p) \cdot k_2(p) + Y(p) \cdot k_1(p) \cdot k_2(p) \quad (1)$$

или

$$Y(p) = \frac{X(p) \cdot k_1(p) \cdot k_2(p)}{1 - k_1(p) \cdot k_2(p)}. \quad (2)$$

Как показывает формула (2) для положительной обратной связи в знаменателе получается минус (-). Значит, знак (+) в знаменателе формулы (2) соответствует отрицательной обратной связи.

Из формулы (2) передаточная функция

$$k_{xy}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k_1(p) \cdot k_2(p)}{1 - k_1(p) \cdot k_2(p)}. \quad (3)$$

При равенстве к нулю знаменателя $1 - k_1(p) \cdot k_2(p) = 0$ передаточная функция $k_{xy}(p)$ может стремиться к бесконечности. Это, вообще говоря, свидетельствует о возможной неустойчивости системы.

2. Канал $\lambda - y$: $Y(p) = \lambda(p) \cdot k_2(p) + Y(p) \cdot k_1(p) \cdot k_2(p)$. (4)

$$k_{\lambda y}(p) = \frac{Y(p)}{\lambda(p)} = \frac{k_2(p)}{1 - k_1(p) \cdot k_2(p)}. \quad (5)$$

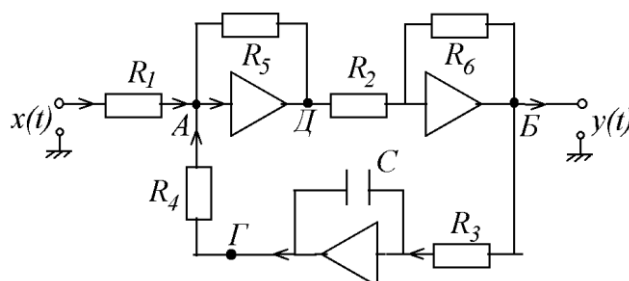
3. Канал $v - y$: $Y(p) = v(p) + Y(p) \cdot k_1(p) \cdot k_2(p)$. (6)

$$k_{vy}(p) = \frac{1}{1 - k_1(p) \cdot k_2(p)}. \quad (7)$$

В случае отрицательной обратной связи, передаточная функция по каналу $x - y$ (см.(3)) принимает следующий вид:

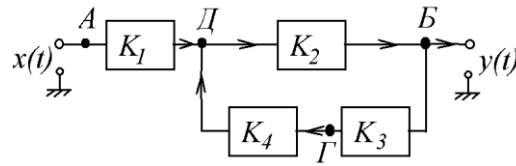
$$k_{xy}(p) = \frac{k_1(p) \cdot k_2(p)}{1 + k_1(p) \cdot k_2(p)} \quad (8)$$

3.12. Пример расчета САР с операционными усилителями



Определить передаточную функцию $k(p)$ системы с операционными усилителями. Найти особые точки (полюса и нули) системы.

Решение: Нарисовать эквивалентную схему с 4 каскадами (имеем 4 входных сопротивления) и, соответственно, с 4 коэффициентами передачи k_1, k_2, k_3, k_4 . При этом указываем направление перемещения сигналов. Каскадов 4, т.к. входных сопротивлений 4.



Для каскада k_4 используем верхний левый операционный усилитель для сигнала обратной связи. k_1 - каскад только для сигнала $x(t)$.

$$y(t) = k_1 \cdot k_2 \cdot x(t) + k_3 \cdot k_4 \cdot y(t). \quad (4)$$

Используем формулу коэффициента усиления операционного усилителя, тогда

$$k_1 = -\frac{R_5}{R_1}; \quad k_2 = -\frac{R_6}{R_2}; \quad k_3 = -\frac{1/j\omega C}{R_3}; \quad k_4 = -\frac{R_5}{R_4}. \quad (5)$$

Из (4) и (5)

$$y(t) = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_1 \cdot R_2} x(t) - \frac{R_5 \cdot R_6}{R_2 \cdot j\omega C R_3 \cdot R_4} \cdot y(t) \quad \text{или}$$

$$y(t) \left[1 + \frac{R_5 \cdot R_6}{j\omega C R_2 R_3 R_4} \right] = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_1 \cdot R_2} x(t). \quad (6)$$

Переходим к изображениям

$$Y(p) \left[1 + \frac{R_5 \cdot R_6}{j\omega C R_2 R_3 R_4} \right] = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_1 \cdot R_2} X(p). \quad (7)$$

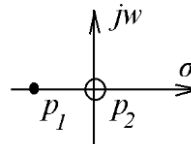
Передаточная функция всей системы

$$k(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{p C R_3 R_4 R_5 R_6}{R_1 (p C R_2 R_3 R_4 + R_5 R_6)}.$$

1 полюс первого порядка: $p_1 = -\frac{R_5 R_6}{C R_2 R_3 R_4}$

1 нуль первого порядка: $p_2 = 0$

$p = \sigma + j\omega$



4. О статистической радиофизике

4.1. Некоторые понятия теории вероятности

Строгое определение *вероятности* дать затруднительно. Условно имеются 3 вида вероятностей.

1. В *математике* сначала формируются основные аксиомы теории вероятности. Зато даются строгие определения свойств теории вероятности.
2. В *физике* определение вероятности дается через частоту события. *Событие* – всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Число, которое тем больше, чем более возможно события, мы назовем вероятностью события. Считаем более вероятными те события, которые происходят чаще, т.е. вероятность события тесно связана с опытным, практическим понятием частоты события.

По Лапласу:

$$\text{Вероятность } P = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{общее число равновозможных исходов}} \leq 1. \quad (1)$$

Общий недостаток определения Лапласа состоит в том, что вероятность как бы определяется через вероятность, так как в знаменателе входит слово «равновозможных» – вероятностное понятие. Заранее принимается равномерность распределения вероятностей всех возможных исходов n , где $P = \frac{m}{n}$. (2)

3. *Термодинамической вероятностью* $W_{\text{тр}}$ называется число случаев, благоприятствующих наступлению данного события. Общее число возможных случаев в каждой физической задаче является константой.

Термодинамическая вероятность определяет число микросостояний, соответствующих одному данному макросостоянию, т.е. $W_{\text{тр}} \geq 1$.

Макросостояние системы из N частиц с общей энергией E в термодинамике определяется экспериментально определенными параметрами: объемом, давлением, температурой. Каждое из состояний системы с определенным распределением в ней частиц 1) в пространстве и 2) по значениям энергии называется микросостоянием.

$W_{\text{тр}}$ легко вычислить лишь в случае идеальных газов. Для реальных систем термодинамическую вероятность можно оценить по величине статистической суммы. $W_{\text{тр}}$ применяется в статистической физике для вычисления свойств системы, находящейся в термодинамическом равновесии (для случая равновесного состояния термодинамическая вероятность имеет максимальное значение).

Термодинамическая вероятность $W_{\text{тр}}$ связана с энтропией (мерой неопределенности):

$$S = k \ln W_{\text{тр}} + C, \quad (3)$$

где C – const, который, вообще говоря, неизвестна, поэтому в задачах обычно определяют изменение энтропии, чтобы избавиться от неопределенности C .

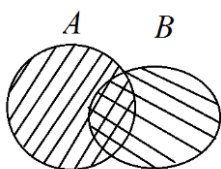
Для расчета термодинамической вероятности существенно, считаются ли одинаковые частицы системы различными или неразличимыми. Поэтому классическая механика и квантовая механика приводят к разным выражениям для термодинамической вероятности.

4.2. Случайные события

Событие – всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

1. Суммой 2-х событий A и B называется событие C , состоящее в выполнении или события A , или события B , или обоих вместе – все заштрихованные площади.

$$A + B = A \cup B = C. \quad (1)$$



Правило «или, или, или»

Теорема: Вероятность суммы 2-х несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (2)$$

Если события $A, B, \dots$ и т.д. образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна 1.

Пример: для стержня из 6 граней

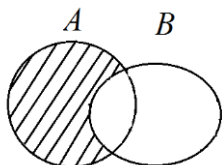
$$1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6. \quad (3)$$

Если все грани одинаковы (идеально), то

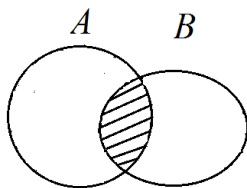
$$1 = 6p, \quad (4)$$

вероятность попадания на одну из граней $p = \frac{1}{6}$.

2. Разностью 2-х событий $A-B$ называется событие C , состоящее из элементов множества A , не принадлежащих B – только заштрихованная площадь.



$$A - B = C. \quad (5)$$



3. Произведением 2-х событий А и В называется событие С, состоящее в совместном выполнении и события А, и события В – только заштрихованная площадь.

$$C = A \cdot B = A \cap B. \quad (6)$$

Правило «и, и».

Теорема: Вероятность произведения 2-х событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right). \quad (7)$$

2 события называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (8)$$

На основе формулы (8) можно перейти и последовательно соединенным элементам радиотехники с точки зрения надежности.

3.1. Если система состоит из «k» последовательно соединенных элементов, то вероятность безотказной работы системы вычисляется по формуле

$$P = \prod_{i=1}^k p_i, \quad (9)$$

где $p_i = p_i(t)$ – вероятность безотказной работы i-го элемента на интервале (0, t). Из формулы (9) видно, что с увеличением числа последовательно включенных элементов вероятность безотказной работы системы убывает.

3.2. Вероятность безотказной работы $P = P(t)$ системы из «k» параллельно соединенных элементов

$$P = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - p_i). \quad (10)$$

С увеличением числа параллельно соединенных элементов вероятность безотказной работы увеличивается.

Примеры на формулу вероятности по Лапласу

Пример 1: Допустим, что студент выучил из 28 билетов 4 четных и 12 нечетных (студент заходит первым).

По классической схеме вероятность того, что студент получит выученный им билет, равна $p = \frac{m}{n} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$.

Пример 2: То же условие, но студент заходит, когда остались 14 билетов и все они нечетные. Какова вероятность того, что студент получит выученный билет.

$$p = \frac{m}{n} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}.$$

Пример 3: Каждая буква слова «математика» написана на отдельной карточке, карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что при случайной выборке четырех букв из слова «математика» будут получены буквы, из которых можно составить слово «тема».

Общее число равновозможных случаев равно числу сочетаний из 10 букв, составляющих слово «математика», по 4

$$n = C_{10}^4. \quad (11)$$

Число благоприятных случаев по формуле (8)

$$m = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 12, \quad (12)$$

так как буква «т» может быть выбрана двумя способами, буква «е» - одним, буква «м» - двумя и буква «а» - тремя способами.

Если сочетания отличаются только самими числами, то

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}. \quad (13)$$

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210. \quad (14)$$

По формуле Лапласа (см.(12), (14))

$$p = \frac{m}{n} = \frac{12}{C_{10}^4} = \frac{12}{210} = \frac{2}{35}.$$

Пример 4: Каждая буква слова «математика» написана на отдельной карточке, карточки тщательно перемешаны. Последовательно извлекаются сразу четыре карточки. Какова вероятность $P(A)$ получить слово «тема»?

Решение 1: $m = 12$ как в примере 3. Сочетания C_{10}^4 отличаются не только самими членами, но и их порядком, поэтому

$$C_N^k = \frac{N!}{(N-k)!}. \quad (15)$$

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040.$$

$$p = \frac{m}{n} = \frac{12}{5040} = \frac{1}{420}.$$

Решение 2: Карточек с каждым разом становится меньше, поэтому используем понятие условной вероятности – см. формулу (7) предыдущей темы. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 – события, состоящие в последовательном извлечении букв «т», «е», «м», «а». Тогда соответствующие вероятности равны:

$$P(A_1) = \frac{2}{10} \rightarrow \text{"т", встречается 2 раза}$$

$$P\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \frac{1}{9} \rightarrow \text{"е",}$$

$$P\left(\frac{A_3}{A_1, A_3}\right) = \frac{2}{8} \rightarrow "м",$$

$$P\left(\frac{A_4}{A_1, A_2, A_3}\right) = \frac{3}{7} \rightarrow "а",$$

$$P(A) = P(A_1) \cdot P\left(\frac{A_2}{A_1}\right) \cdot P\left(\frac{A_3}{A_1, A_3}\right) \cdot P\left(\frac{A_4}{A_1, A_2, A_3}\right) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{420}.$$

4.3. Методика оценки шумов

Методика оценки шумов состоит из 3-х этапов:

1. Нахождение (подбор) функции распределения вероятностей.
2. С помощью функции распределения определяются средние значения случайных величин (математические ожидания).
3. Определение флуктуации относительно средних значений. Например, $(\delta_n)^2 = (n - \bar{n})^2$ – шумы (флуктуации).

n – истинное значение,

$\bar{n}$ – среднее значение.

4.4. Биномиальное распределение (распределение Бернулли)

Мы рассмотрим только качественный подход. Полный вывод формулы дается, например, в книге-справочнике: А.К. Митропольский. Техника статистических вычислений. – М.: Наука, 1971. -576 с., с. 197-198.

Рассмотрим флуктуацию числа молекул в объеме V идеального газа. Предполагаем отсутствие сил межмолекулярного взаимодействия.

N – полное число молекул в большом объеме V .

n – истинное число молекул в малом объеме v .

Из интуитивных соображений можно записать среднее число частиц в малом объеме v :

$$\bar{n} = N \frac{v}{V}. \quad (1)$$

В следующей теме докажем, что эта формула является точной для биномиального распределения.

$$p = \frac{v}{V} - const \quad (2)$$

обозначает вероятность нахождения 1 частицы в малом объеме.

$$q = 1 - p = 1 - \frac{v}{V} = const \quad (3)$$

обозначает вероятность ненахождения 1 частицы в малом объеме, то есть частица находится вне v , но внутри большого объема V .

Для формулировки распределения пользуемся правилом «и, и» (умножение вероятностей):

Некоторое событие реализуется в форме A (молекула находится в малом объеме v) с вероятностью p «и» в форме B (молекула не находится в малом объеме v) с вероятностью $q = 1 - p$. Если такие события происходят N раз (полное число частиц в большом объеме V), то вероятность того, что n из них реализуется в форме A равна

$$P_N(n) = C_N^n p^n q^{N-n}, \quad (4)$$

где C_N^n – число сочетаний, которыми можно реализовать интересные нас события.

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}, \quad (5)$$

так как частицы неразличимы (независимы, то есть различные сочетания равноправны).

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \quad \text{- Распределение Бернулли. (6)}$$

Формулу (6) называют биномиальной, так как $P_N(n)$ представляет собой n -й член разложения бинома

$$(p + q)^N = \sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^{N-n} = \sum_{n=0}^N P_N(n). \quad (7)$$

Написанная сумма должна быть равна единице, поскольку она выражает вероятность какого-либо из возможных значений n . Очевидно, что $p + q = 1$.

При больших значениях N и n вычисление $P_N(n)$ по формуле (6) затруднительно, так как факториалы $n!$, $N!$... – очень большие и громоздко вычисляемые числа. Поэтому при вычислениях этого рода широко пользуются как специально составленными для факториалов таблицами, так и некоторыми приближенными формулами.

Условие нормировки принимает вид

$$\sum_{n=0}^N P_N(n) = P(0) + P(1) + \dots + P(N) = 1, \quad (8)$$

так как какая-то вероятность должна реализоваться.

4.5. Определение средних значений для распределения Бернулли

Зная функцию распределения или плотность вероятности, можно определить среднее значение.

Используем сначала формулу бинома, значит выбираем распределение Бернулли (биномиальное распределение).

$$(ps + q)^N = \sum_{n=0}^N S^n P(n), \quad (1)$$

где S – параметр, подбираемый нами.

Из уравнения (1) берем первую производную по S :

$$Np(ps + q)^{N-1} = \sum_{n=0}^N nS^{n-1} P(n). \quad (2)$$

Допустим, что $S = 1$. Учитывая $p + q = 1$, (3) получим уравнение вида

$$Np = \sum_{n=0}^N n P(n). \quad (4)$$

Нетрудно убедиться, что правая часть соответствует формуле по определению среднему $\bar{n}$ (см. ранее пройденный материал).

Итого, получаем $\boxed{\bar{n} = Np}$. (5)

Это выражение в точности совпадает с интуитивно найденным выражением

$$\bar{n} = N \frac{v}{V}, \quad (6)$$

где отношение малого объема к большому (см. предыдущую тему) равняется вероятности попадания одной частицы в малый объем

$$p = \frac{v}{V}. \quad (7)$$

4.6. Определение флуктуаций (шумов) для распределения Бернулли

За основу берем формулу бинома с параметром S , который потом приравняем единице

$$(ps + q)^N = \sum_{n=0}^N S^n P(n). \quad (1)$$

Берем первую производную по S от (1)

$$Np(ps + q)^{N-1} = \sum_{n=0}^N nS^{n-1} P(n). \quad (2)$$

Из уравнения (2) берем еще вторую производную по параметру S

$$N(N-1)p^2(ps + q)^{N-2} = \sum_{n=0}^N n(n-1)S^{n-2} P(n). \quad (3)$$

После этого $S = 1$, тогда уравнение (3) примет вид

$$N(N-1)p^2 = \sum_{n=0}^N n(n-1) P(n). \quad (4)$$

В уравнении (4) справа раскроем скобку, то

$$N(N-1)p^2 = \sum_{n=0}^N n^2 P(n) - \sum_{n=0}^N n P(n). \quad (5)$$

Нетрудно убедиться, что в правой части (5) получились средние значения (по определению).

$$N(N-1)p^2 = \overline{n^2} - \bar{n}. \quad (6)$$

В качестве флуктуаций (шумов) обычно берут средне-квадратичное отклонение

$$\overline{(\delta n)^2} = \overline{(n - \bar{n})^2}, \quad (7)$$

где n – истинное значение случайной величины,

$\bar{n}$ – среднее значение случайной величины.

Раскроем скобку правой части уравнения (7)

$$\overline{(\delta n)^2} = \overline{n^2 - 2n\bar{n} + (\bar{n})^2}. \quad (8)$$

В правой части знак усреднения действует там, где отсутствует другой знак усреднения:

$$\overline{(\delta n)^2} = \overline{n^2} - 2\bar{n}\bar{n} + (\bar{n})^2 = \overline{n^2} - (\bar{n})^2. \quad (9)$$

Левую часть $\overline{(\delta n)^2}$ иногда для краткости называют дисперсией или средним от квадрата отклонения.

Как показывает формула (9), для определения флуктуаций (шумов) $\overline{(\delta n)^2}$ достаточно знать $\overline{n^2}$, так как $(\bar{n})^2$ мы уже знаем из предыдущей темы (см. формулу (5)).

Итого, в правую часть уравнения (9) вместо $\overline{n^2}$ делаем постановку из уравнения (6)

$$\overline{(\delta n)^2} = N(N-1)p^2 + \bar{n} - (\bar{n})^2. \quad (10)$$

Раскрываем скобку и вместо $\bar{n}$ пишем правую часть уравнения (5) предыдущей темы

$$\overline{(\delta n)^2} = Np(1-p). \quad (11)$$

Если вспомним, что $(1-p)$ равняется вероятности непопадания 1 частицы в малый объем q , то получим

$$\boxed{\overline{(\delta n)^2} = Npq}. \quad (12)$$

Если вероятность попадания одной частицы в малый объем очень мала ($p \ll 1$), то $q \approx 1$, т.е.

$$\overline{(\delta n)^2} \approx Np \approx \bar{n}. \quad (13)$$

Это значит, что дисперсия $\overline{(\delta n)^2}$ может быть очень большой величиной.

В качестве показателя точности (например, эксперимента) обычно берут отношение девиаты σ к среднему значению $\bar{n}$

$$\frac{\sigma}{\bar{n}} \approx \sqrt{\frac{\overline{(\delta n)^2}}{(\bar{n})^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \ll 1, \text{ если } p \ll 1 \quad (14)$$

Например, в газе с объемом $v=1 \text{ см}^3$ находятся около 10^{20} частиц.

Пример: Определить среднее число электронов, попадающих в анод пентода $\bar{n}_1$ —?

Распределение тока, протекающего через экранную сетку и анод в пентоде, представляет собой яркий пример биномиального закона (распределение Бернулли). Предполагаем, что вероятность прибытия электрона на анод не зависит от положения точки вылета электрона на катоде. Если в единицу времени катод эмитирует N электронов и если p есть вероятность попадания одного электрон на анод, то вероятность попадания на анод в единицу времени n_1 электронов равна $P_N(n_1)$. Тогда среднее число электронов, попадающих в анод пентода в единицу времени

$$\bar{n}_1 = Np. \quad (16)$$

Дисперсия данного процесса

$$\sigma^2 \approx \overline{(n_1 - \bar{n}_1)^2} = Np(1-p). \quad (17)$$

4.7. Закон равнораспределения по степеням свободы

В большой термостат с жидкостью помещаем LC колебательный контур (внешние тела), то в результате хаотического движения электронов в цепи контура на его зажимах появится тепловое флуктуационное напряжение.

Флуктуации внутренней энергии E будут передаваться LC контуру, согласно формуле (4)

$$\Delta E = -\Phi, \quad (1)$$

где Φ – энергия, переданная LC контуру.

$$\text{Например, } \Phi = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}, \quad (2)$$

где I – флуктуационный ток через индуктивность L ,

U – флуктуирующее напряжение на емкости C .

Рассмотрим большое число идентичных систем, находящихся при постоянной температуре T и удовлетворяющих следующим условиям:

1. Энергия Φ зависит от n независимых переменных $q_1, q_2, \dots, q_n$ (координат, скоростей и т.д.). Число этих переменных называется числом степеней свободы.
 2. Энергия Φ может быть представлена суммой квадратичных членов по каждой переменной
- $$\Phi = a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + \dots + a_n q_n^2. \quad (3)$$
3. Каждая переменная может непрерывно изменяться от $-\infty$ до $+\infty$ (нет ограничения).

Если эти 3 условия выполнены, то средняя энергия на одну степень свободы равна $\frac{1}{2}kT$.

$$\boxed{\bar{\Phi} = \frac{1}{2}kT}. \quad (4)$$

Проведём качественный вывод формулы (4).

$$\text{Если } \Phi \text{ имеет квадратичный вид, то в общем виде } \Phi = \frac{1}{2} \Phi_0 x^2. \quad (5)$$

(5) поставляем в распределение Больцмана.

$$P(x)dx = A e^{-\frac{\Phi_0 x^2}{2kT}} dx. \quad (6)$$

$$\text{Сделаем замену } \frac{1}{\sigma^2} = \frac{\Phi_0}{kT} \quad (7), \text{ то}$$

$$P(x)dx = A e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (8)$$

что является нормальным (Гауссовым) распределением.

A определяется из условия нормировки и равняется $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

При решении примеров нормального распределения $\overline{x^2}$ равняется дисперсии σ^2 .

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x) dx = \sigma^2. \quad (9)$$

Сравнение формул (7) и (9) дает

$$\overline{x^2} = \frac{kT}{\Phi_0}. \quad (10)$$

Значит, по формулам (5) и (10)

$$\overline{\Phi} = \frac{1}{2} \Phi_0 \overline{x^2} = \frac{1}{2} \Phi_0 \frac{kT}{\Phi_0}. \quad (11)$$

Итого, средняя энергия приходящаяся на одну степень свободы $\overline{\Phi} = \frac{1}{2} kT$, что и требовалось доказать, где

k – коэффициент Больцмана

T – абсолютная температура.

4.8. Примеры на закон равнораспределения по степеням свободы

Берем огромный термостат с очень большой внутренней энергией E . Пусть в объеме имеются тела (частицы). Термодинамика имеет дело с макро телами.

Мы заметим, что внутренняя энергия E передает флуктуации телам (частицам) согласно формуле (1) предыдущей темы

$$\Delta E = -\Phi, \quad (1)$$

где Φ – энергия переданная телу (частице).

Рассмотрим разные эксперименты (опыты).

1. Гальванометр.

Нерегулярная бомбардировка катушки гальванометра молекулами термостата вызывает флуктуирующее отклонение гальванометра, а последнее, в свою очередь, создает флуктуацию ЭДС в катушке гальванометра. Допустим, в термостате зеркальце гальванометра отклонилось на угол φ , то энергия, переданное гальванометру

$$\Phi = \frac{1}{2} D \varphi^2. \quad (2)$$

Воспользовавшись формулой (4) предыдущей темы можно записать

$$\frac{1}{2} D \overline{\varphi^2} = \frac{1}{2} kT. \quad (3)$$

Или можем найти среднее значение квадрата углового отклонения зеркальца гальванометра за счет случайных столкновений с молекулами жидкости термостата

$$\overline{\varphi^2} = \frac{kT}{D}, \quad (4)$$

где D – коэффициент трения.

2. Емкость.

$$\frac{1}{2} C \overline{U^2} = \frac{1}{2} kT, \quad (5)$$

или

$$\boxed{\overline{U^2} = \frac{kT}{C}}. \quad (6)$$

3. Индуктивность:

$$\frac{1}{2} L \overline{I^2} = \frac{1}{2} kT \quad (7)$$

или

$$\boxed{\overline{I^2} = \frac{kT}{L}}. \quad (8)$$

Левая часть формул (6), (8) фактически дает средне-квадратичные флуктуации, если средние значения случайных процессов являются нулевыми.

$$\overline{(\delta n)^2} = \overline{(n - \bar{n})^2} = \overline{n^2} - (\bar{n})^2 \approx \overline{n^2}, \text{ если } \bar{n} = 0.$$

4. 1 молекула.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы, имеющей 3 степени свободы (x, y, z)

$$\boxed{\overline{\Phi} = 3 \cdot \frac{1}{2} kT}. \quad (9)$$

5. 1 молекула (висит на расстоянии Z от основания)

Потенциальная энергия $\Phi = mgZ$, то закон равнораспределения по степеням свободы не применим, так как зависимость энергии от координаты Z не квадратичная.

4.9. Гармонический анализ стационарных случайных величин

Распределение Больцмана не дает ответа на вопрос о диапазоне частот для шумов. Необходимо бывает узнать как распределены шумы по диапазону частот.

Обычно предполагают, что помеха является:

- 1) стационарным случайным процессом,
- 2) «белым шумом», т.е. имеет постоянную спектральную плотность $\dot{S}(w)$ (или спектральную интенсивность $J(w)$)

Шум, будучи некоррелированной во времени (абсолютно случайный процесс), может быть представлен как беспорядочное наложение возмущений с нулевой длительностью. Тепловые и дробовые шумы скорее всего подчиняются нормальному распределению (Гауссово распределение).

Спектральная плотность мощности:

$$J(w) = \frac{4\pi |\dot{S}_T(w)|^2}{T}. \quad (1)$$

Она дает распределение по диапазону частот средне-квадратичной амплитуды.

Нетрудно показать, что $J(w)$ зависит только от амплитудного спектра случайного стационарного процесса.

$$\dot{S}_T(w) = |\dot{S}_T(w)|e^{-j\varphi(w)}. \quad (2)$$

Если слева и справа берем модуль и возвышаем в квадрат, то

$$|\dot{S}_T(w)|^2 = S_T^2(w). \quad (3)$$

Получили квадрат амплитудного спектра. Это значит, что $J(w)$ зависит только от амплитудного спектра, тогда как комплексная спектральная плотность $\dot{S}(w)$ зависит и от амплитудного, и от фазового спектров (см. (2)).

Причем, $J(w)$ не зависит от изменения начала отсчета времени.

$$J_0(w) = \frac{4\pi}{T} |\dot{S}_T(w)|^2 = \frac{4\pi}{T} \left| \dot{S}(w) e^{jw\tau} \right|^2 = \frac{4\pi}{T} |\dot{S}(w)|^2. \quad (4)$$

4.10. Формулы Хинчина-Винера

Покажем, что автокорреляционная функция $B(\tau)$ и спектральная интенсивность $J(w)$ связаны однозначно формулами типа интегралов Фурье.

Запишем формулу свертки

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(t + \tau) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}_T(w)|^2 e^{jw\tau} dw. \quad (1)$$

Если все члены уравнения (1) поделим на время наблюдения T , то получим автокорреляционную функцию

$$B(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi |\dot{S}(w)|^2}{T} e^{jw\tau} dw \quad (2)$$

или
$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi |\dot{S}(w)|^2}{T} \cos(w\tau) dw, \quad (3)$$

так как интеграл от нечетной функции $\sin w\tau$ по симметричным пределам $(-\infty, +\infty)$ равен нулю. Учитывая формулу (4) предыдущей темы получаем

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} J(w) \cos(w\tau) dw. \quad (4)$$

Получили одну из формул Хинчина-Винера. $B(\tau)$ показывает насколько последующее действие запомнило предыдущее событие (действие). $B(\tau)$ можно определить экспериментально по блок-схемам корреляторов.

Используя идею преобразования Фурье, можно выполнить обратный переход из (4).

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(w)}{2} e^{jw\tau} dw. \quad (5)$$

По обратному преобразованию Фурье

$$\frac{J(w)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-jw\tau} d\tau \quad (6)$$

или

$$J(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau) \cos(w\tau) d\tau. \quad (7)$$

Итого, формула (4) и (7) называются формулами Хинчина-Винера и широко применяются при решении задач статистической радиофизики.

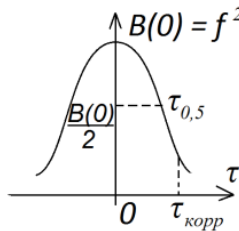
Отметим отдельные следствия:

1. $B(\tau) = B(-\tau)$, (8) так как $J(w)$ и $\text{Cos}(w\tau)$ являются четными функциями по частоте.
2. Вывод формулы (7) показывает, что $J(w)$ и $B(\tau)$ есть трансформанты Фурье.
3. Чем более широкополосен процесс, тем время корреляции меньше, и наоборот.

$$\Delta w \cdot \tau_{\text{корр}} \approx \text{const.} \quad (9)$$

$$4. B(0) = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \overline{f^2(t)} = \int_0^\infty J(w) dw \quad (10)$$

См. формулы (2), (4)



Чем уже $B(\tau)$, тем процесс более хаотичен (малосвязанность). Для шумов $\tau_{\text{корр}}$ может стремиться к 0.

Автокорреляционная функция показывает память случайного стационарного процесса о самой себе при относительных смещениях по времени τ . Чем меньше $\tau_{0,5}$, тем хуже память процесса.

4.11. Идея обнаружения сигнала на фоне шумов, используя автокорреляционную функцию

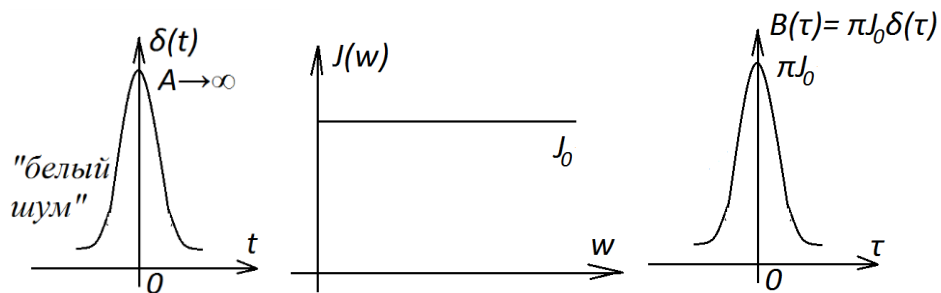
1. Шум можно моделировать δ -функцией, ширина спектра которой большая (практическая независимость от частоты ω). Это значит, что и спектральная интенсивность не будет зависеть от ω , а автокорреляционная функция будет пропорциональна $\delta(\tau)$.

$$B(\tau) = \int_0^\infty J(w) \cdot \text{Cos}(w\tau) dw \cong J_0 \int_0^\infty \text{Cos}(w\tau) dw = \pi J_0 \delta(\tau), \quad (1)$$

так как при рассмотрении темы белого шума записывали формулу

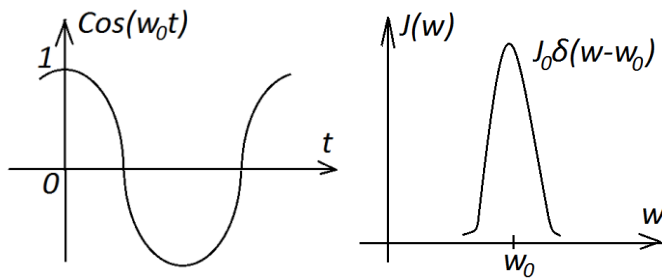
$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{Cos}(wt) dw. \quad (2)$$

Полученные результаты представили в графическом виде



Малая ширина функции $B(\tau)$ свидетельствует о «хаосе», т.е. почти отсутствии «памяти» у белого шума.

2. В качестве сигнала берем гармоническую функцию (монохроматический сигнал)



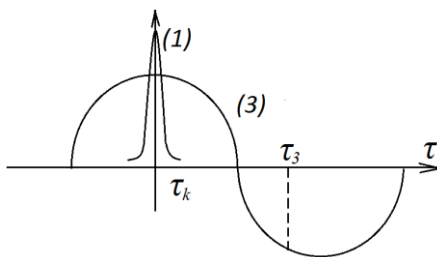
Реальная спектральная интенсивность.

По интегралу Фурье «идеальной» косинусоиде соответствует линейчатый спектр на частоте w_0 , т.е. линия и по $J(w)$. На графике мы нарисовали реальную картину $J(w)$ с учетом нестабильности частоты косинусоидальной функции.

По формуле Хинчина-Винера

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} J_0 \cdot \delta(w - w_0) \cos(w\tau) dw = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} J_0 \cdot \delta(w - w_0) \cos(w\tau) dw = \\ = \frac{1}{2} J_0 \cos(w_0 \tau). \quad (3)$$

Получается, что косинусоидальному процессу по t соответствует косинусоидальная

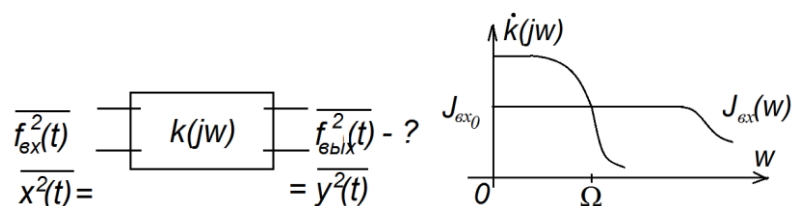


автокорреляционная функция по τ . Разница формул (1) и (3) позволяет четко обнаружить сигнал на фоне белого шума (или, говорят, на фоне гауссовского шума). На основе (1) и (3) построим совмещенный общий график.

Если τ_3 выберем больше корреляционного времени белого шума, то наверняка попадем на автокорреляционную функцию сигнала (косинусоиды).

4.12. Идея оценки средней мощности шумов на выходе линейного четырехполюсника

В реальных 4-х полюсниках полоса пропускания Ω коэффициента передачи $k(jw)$ обычно бывает значительно меньше ширины спектральной интенсивности шумов на входе четырехполюсника $J_{вх}(w)$. Это позволяет оценить мощность шума (среднюю интенсивность шума) $\overline{f_{вх}^2(t)}$ на выходе четырехполюсника.



Мощность шума выразим через автокорреляционную функцию $B(\tau)$ и спектральную интенсивность $J(w)$.

$$B(0) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t + \tau) dt = \overline{f^2(t)}. \quad (1)$$

С другой стороны, по формуле Хинчина-Винера:

$$B(0) = \int_0^\infty J(w) dw,$$

так как $\cos(w\tau)$ при $\tau = 0$ равняется единице.

Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), можно записать

$$\overline{f_{\text{BX}}^2(t)} = \int_0^\infty \frac{4\pi |\dot{S}_{\text{BX}}(w)|^2}{T} dw \quad (3)$$

$$\text{и } \overline{f_{\text{ВЫХ}}^2(t)} = \int_0^\infty \frac{4\pi |\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(w)|^2}{T} dw. \quad (4)$$

Для линейного четырехполюсника спектр выходного сигнала:

$$\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(w) = k(jw) \dot{S}_{\text{ВХ}}(w). \quad (5)$$

(Второй этап расчета линейных искажений).

Тогда мощность шума на выходе через формулы (4) и (5) можно записать так

$$\overline{f_{\text{ВЫХ}}^2(t)} = \int_0^\infty \frac{4\pi |\dot{S}_{\text{ВХ}}(w)|^2 |k(jw)|^2}{T} dw. \quad (6)$$

Используя спектральную интенсивность входа

$$\overline{f_{\text{ВЫХ}}^2(t)} \approx J_{\text{ВХ0}} \int_0^\infty |k(jw)|^2 dw. \quad (7)$$

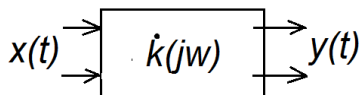
С учетом реальной полосы пропускания четырехполюсника

$$\boxed{\overline{f_{\text{ВЫХ}}^2(t)} \approx J_{\text{ВХ0}} \int_0^\Omega |k(jw)|^2 dw} \quad (8)$$

Мощность шума на выходе (отклик) повторяет с точностью до постоянного множителя форму квадрата модуля комплексной частотной характеристики линейной системы.

4.13. Примеры отклика линейных систем на воздействие случайных сигналов

См. дополнительно книгу: А.С. Чумаков. Основы статистической радиотехники: учебное пособие. – Томск: изд. ТУСУР, 2003. – 394 с.



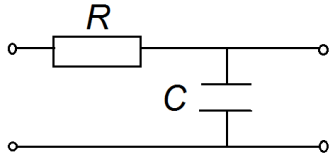
Наиболее удобными характеристиками для описания отклика являются:

1. Корреляционная функция $B(\tau)$.
2. Спектральная плотность мощности (спектральная интенсивность) $J(w)$.
3. Среднее квадратичное значение $M\{y^2(t)\}$

Как показывает формула (8) предыдущей темы, расчеты отклика $\overline{f_{\text{вых}}^2(t)} = \overline{y^2(t)}$ следует начинать с определения модуля коэффициента передачи четырехполюсника.

Пример 1.

Дано:



$$|k(j\omega)|^2 - ?$$

1) $k(j\omega) = \frac{\dot{z}_{\text{вых}}(\omega)}{\dot{z}_{\text{вх}}(\omega)} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega T}$ (1), где $T = RC$ является характерным временем цепочки

2) Комплексное выражение $k(j\omega)$ запишем в удобном виде (раздельно активную и мнимые части):

$$k(j\omega) = \frac{1}{(1 - j\omega T)} \cdot \frac{(1 - j\omega T)}{(1 + j\omega T)} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}. \quad (2)$$

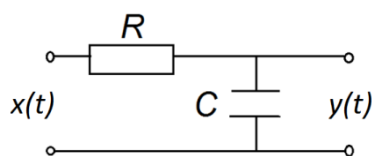
Для решения задач надо бывает найти модуль коэффициента передачи

$$|k(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 + \frac{\omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2}} \quad (3)$$

$$|k(j\omega)|^2 = \frac{1}{(1 + \omega^2 T^2)^2} + \frac{\omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2} = \frac{1 + \omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2}. \quad (4)$$

Пример 2.

Дан низкочастотный RC фильтр первого порядка, на вход которого поступает белый шум со спектром $\dot{S}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}$. Найти спектральную плотность мощности отклика на выходе фильтра $J_y(\omega)$.



Пользуемся формулой мощности шумов на выходе линейного четырехполюсника.

$$J_y(\omega) = J_x(\omega) |k(j\omega)|^2. \quad (5)$$

1) Ищем спектральную плотность мощности белого шума на входе

$$J_x(\omega) = \frac{4\pi |\dot{S}_x(\omega)|^2}{T} = \frac{1}{\pi T}. \quad (6)$$

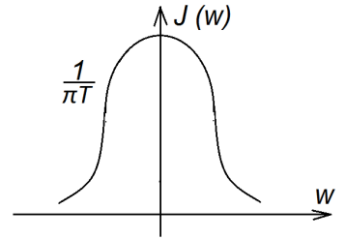
$$|\dot{S}_x(\omega)| \cong \frac{1}{2\pi} - \text{для белого шума.}$$

2) Квадрат модуля низкочастотного фильтра первого порядка нашли в примере №1.

$$|\dot{k}(jw)|^2 = \frac{1}{1+w^2T^2}. \quad (7)$$

Итого, спектральная плотность мощности на выходе фильтра равняется

$$J_y(w) = \frac{1}{\pi T(1+w^2T^2)}. \quad (7)$$



Получили что-то похожее на колокол в зависимости от круговой частоты w .

Пример 3.

Дан низкочастотный фильтр первого порядка с ограниченным по полосе ($0 \div w$) белым шумом на входе. Оценить величину среднего квадрата отклика $M(y^2)$.

Как было показано раньше автокорреляционную функцию $B(0)$ при $\tau = 0$ можно записать в виде 2-х формул.

$$B(0) = \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt = \overline{y^2(t)} = M\{y^2(t)\}. \quad (8)$$

С другой стороны, по формуле Хинчина-Винера $B(\tau) = \int_0^\infty J_y(w) \cos(w\tau) dw$. (9)

При $\tau = 0$ $B(0) = \int_0^\infty J_y(w) dw$. (10)

Приравнявая правые части, получаем формулу для решения задачи.

$$M\{y^2(t)\} = \int_0^\infty J_y(w) dw = \int_0^{w_c} J_x(w) |\dot{k}(jw)|^2 dw \cong J_{x_0} \int_0^{w_c} \frac{1}{1+(wT)^2} dw = \\ J_{x_0} \frac{1}{T} \int_0^{w_c T} \frac{1}{1+w_1^2} dw_1 = J_{x_0} \frac{1}{T} \arctg w_1 \Big|_0^{w_c T} = J_{x_0} \frac{1}{T} \arctg(w_c T). \quad (11)$$

Пример 4.

Дан низкочастотный фильтр первого порядка, но с чисто белым шумом на входе для всех частот. Найти отклик линейной системы в виде среднего квадратичного значения $M\{y^2(t)\}$.

Идея расчета такая же, как в примере №3.

$$M\{y^2(t)\} = \int_0^\infty \frac{J_0}{1+(wT)^2} dw = \frac{1}{T} \int_0^{Tw} \frac{J_0}{1+w_1^2} dw = \frac{J_0}{T} \int_0^\infty \frac{1}{1+w_1^2} dw = \frac{J_0}{T} \arctg \infty = \frac{J_0}{T} \frac{\pi}{2}.$$

4.14. Об использовании формулы Найквиста для пассивных цепей

Формула Найквиста для теплового шума активного сопротивления R можно записать так $d\overline{U^2(t)} = J_u(w) dw = \frac{2}{\pi} RkT dw$. (1)

$$\text{На практике } U_{\text{ш}}^2 = \frac{2}{\pi} RkTdw, \quad (2)$$

где k – коэффициент Больцмана,

T – температура,

dw – полоса пропускания.

Формула Найквиста верна для пассивной цепи, состоящей из сопротивлений, катушек индуктивности и конденсаторов. Однако эта формула (теорема) имеет широкие границы применимости:

- 1) пассивные электрические системы-антенны;
- 2) электроакустические системы – микрофоны, громкоговорители;
- 3) электромеханические системы – гальванометры.

Эти системы, находящиеся при одинаковой температуре T , могут быть полностью описаны путем замены этих пассивных систем эквивалентными электрическими схемами, имеющими ту же самую температуру.

Рассматриваемые цепи при этом не должны заключать в себе источников шума нетеплового происхождения:

- а) сопротивление угольного микрофона испытывает случайные вариации, и если при этом через микрофон протекает постоянный ток, то возникает дополнительный шум нетеплового происхождения, интенсивность которого пропорциональна квадрату протекающего тока;
- б) шум в насыщенных диодах – дробовый шум (изучим подробно попозже).

4.15. Применение обобщенной формулы Найквиста к расчетам антенн

Благодаря свойству термодинамики полученная обобщенная формула может быть использована для расчета антенны, излучающей электромагнитные волны. Невозвращение излученной в свободное пространство электромагнитной волны равносильно тому, что произошло полное ее поглощение какой-то поверхностью. Получается как бы термодинамическое равновесие, что дает возможность применения формул термодинамики (например, обобщенной формулы Найквиста).

Допущения:

1. Антенна заключена внутри большой равномерно нагретой до температуры T сферы из сажи (абсолютно черного тела): сфера идеальный поглотитель. В этом случае сопротивление излучения антенны R_s соответствует сопротивлению излучения антенны в свободном пространстве.

2. Считаем, что $R_s = R$ – полная согласованность всей системы. Все что приходит в антенну поглощается сопротивлением R , и наоборот (термодинамическое равновесие).

Из литературы известно, что сопротивление излучения свободного (бесконечного) пространства равняется

$$R_s = \frac{l^2}{6\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\omega^2}{c^3}, \quad (1)$$

где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость в свободном пространстве,

ω – частота излучения с антенны,

l – размер антенны,

c – скорость света.

Как видно из формулы (1) излучательная способность системы одинаково повышается квадратично от l и ω . На практике выгодно работать на более высоких частотах, чем на больших антеннах. Формула (1) подтверждает, что чем выше частота тока, тем большая энергия «отрывается» от провода.

Если известен ток в диполе J_0 , то мощность излучения антенны в одну сторону равна

$$P_{\text{изл}} = \frac{1}{2} R_s J_0^2. \quad (2)$$

Входное сопротивление антенны Z_s определяется как отношение напряжение к току на зажимах антенны; это сопротивление представляет собой последовательное соединение сопротивления излучения R_s и реактивного сопротивления jX_s .

Если ввести эффективный квадратичный средний ток

$$\overline{J^2(t)} = \frac{1}{2} J_0^2, \quad (3)$$

то из формулы (2) получим

$$P_{\text{изл}} = R_s \overline{J^2(t)}, \quad (4)$$

где
$$J(t) = \frac{U(t)}{R+R_s} = \frac{U(t)}{2R_s}, \quad (5)$$

$U(t)$ – напряжение на зажимах антенны.

Значит, мощность излучения антенны равняется

$$P_{\text{изл}} = \frac{\overline{U^2(t)}}{4R_s}. \quad (6)$$

Или, по-другому

$$\boxed{dP_{\text{изл}} = \frac{d\overline{U^2(t)}}{4R_s}}. \quad (7)$$

С другой стороны, по формуле Рэлея-Джинса с учетом квантового эффекта

$$\boxed{dP = \frac{\epsilon(w,T)}{2\pi} dw}. \quad (8)$$

Если приравняем правые части (7) и (8), что допустимо при термодинамическом равновесии

$$d\overline{U^2(t)} = \frac{2}{\pi} R_s \in (w, T) dw = J(w) dw \quad (9)$$

Полученная формула фактически является обобщенной формулой Найквиста, где $Re\dot{Z}(w) = R_s$.

$$\in (w, T) = kT\Lambda(\alpha) = \frac{\pi}{2} f(w, T). \quad (10)$$

Эта же формула (9) является расчетной для излучения антенной электромагнитной волны.

4.16. О марковских процессах

Общая теория случайных процессов марковского типа была развита в начале 30-х годов академиком А.Н. Колмогоровым.

1. Любой случайный процесс определяется «n»-мерной плотностью вероятностей

$$P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = P\left(x_n, t_n / x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}\right) \cdot P_{n-1}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (1)$$

где $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$. Условная вероятность как бы зависит от «истории». Это свойство называется свойством вероятностного последствия.

2. Для «белого шума» (как бы абсолютно случайный процесс)

$$P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \cong P(x_n, t_n) \cdot P_{n-1}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (2)$$

Отсутствует уже условная вероятность, «память» почти отсутствует, независим от предшествующих процессов.

3. Марковские же процессы – это процессы без последствия.

$$P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \cong P(x_n, t_n / x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot P_{n-1}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (3)$$

Условная вероятность зависит только от предшествующего момента. Это, конечно, идеализация, но идеализация достаточно близкая к реальности.

Марковский процесс несет с собой след только предшествующего «столкновения», а «белый шум» вообще не зависит от предшествующих процессов. Значит, марковский шум первое приближение в сторону действительности от белого шума. Этот шум уже не характеризуется δ -функцией.

4.17. Автокорреляционная функция тепловых шумов сопротивления на сверхвысоких частотах

Шум активного сопротивления R. По закону Найквиста тепловые шумы

$$d\overline{U^2(t)} = J_{U_R}(w)dw = \frac{2}{\pi}kTRdw, \quad (1)$$

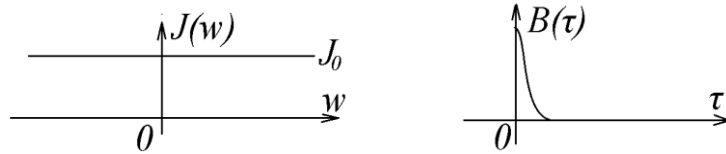
где спектральная интенсивность

$$J_{U_R}(w) = \frac{2}{\pi}kTR = Const \text{ до } 10^{13} \div 10^{14} \text{ Гц} \quad (2)$$

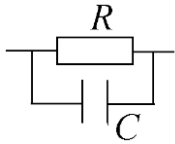
Под действием бесконечных бомбежек электронами ($t_{\text{бомб.}} \ll t_{\text{установления системы}}$) двухполюсник «вырезает» определенную полосу частот из всего значения шумов (от 0 до 10^{14} Гц).

1. Автокорреляционная функция по формуле Хинчина-Винера

$$B_R(c) = \int_0^\infty J(w) \cos(w\tau)dw = J_0\pi\delta(\tau) = 2kTR\delta(\tau). \quad (3)$$



2. Теперь рассмотрим автокорреляционную функцию тепловых шумов сопротивления на сверхвысоких частотах (больше 10^{14} Гц).



Эквивалентная схема R принимает этот вид (с «паразитной» емкостью). По обобщенной формуле Найквиста для определения спектральной интенсивности шумов требуется знать $Re\dot{Z}(w)$.

$$\frac{1}{\dot{Z}_{\text{общ}}(w)} = \frac{1}{R} + jwC = \frac{1+jwRC}{R} \quad (4) \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{\dot{Z}_{\text{общ}}(w)} = \frac{R}{1+w^2C^2R^2} (1 - jwCR). \quad (5)$$

$$Re\dot{Z}(w) = \frac{R}{1+w^2C^2R^2} = \left(\frac{1}{C}\right) \cdot \frac{RC}{1+w^2(RC)^2} = \frac{1}{C} \cdot \frac{\tau_c}{1+w^2\tau_c^2}. \quad (6)$$

Имеет место резкая зависимость от частоты w во второй степени. Шум уже не «белый».

Более того, спектральная интенсивность становится уже функцией частоты

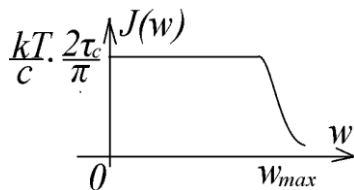
$$J_{RC}(w) = \frac{2}{\pi}kTRe\dot{Z}(w) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{kT}{C}\right) \frac{\tau_c}{1+w^2\tau_c^2}. \quad (7)$$

Если теперь $w \rightarrow \infty$, то $J_{RC}(w) \downarrow$, то есть нет парадокса «ультрафиолетовой катастрофы».

$$\overline{U_{RC}^2(t)} = \int_0^\infty J(w)dw \neq \infty. \quad (8)$$

Средняя от квадрата шумового напряжения является ограниченной величиной.

По формуле (7) построим график.



От 0 до w_{max} имеем как бы кусок «белого шума»: при

$$w_{\text{max}}^2 \cdot \tau_c^2 \ll 1,$$

$$J_{RC}(w) \approx const. \quad (9)$$

По формуле Хинчина-Винера автокорреляционная функция

RC цепочки (используя (7)), получим

$$B_{RC}(\tau) = \int_0^\infty J_{RC}(w) \cos(w\tau) dw = \frac{2}{\pi} \left(\frac{kT}{C} \right) \tau_c \int_0^\infty \frac{\cos(w\tau) dw}{1+w^2\tau_c^2}. \quad (10)$$

Если рассчитать интеграл правой части (10), то

$$B_{RC}(\tau) = \frac{kT}{C} e^{-\frac{\tau}{\tau_c}}. \quad (11)$$

4.18. Отношение правдоподобия

Достоверному приему информации по реальным радиоканалам препятствуют:

- случайные искажения самого радиосигнала при распространении через турбулентную среду;
- неизбежное наличие внешних и внутренних помех;
- техническое несовершенство радиоустройств.

Например, вследствие распространения электромагнитных волн через турбулентную атмосферу, обладающих случайными коэффициентами поглощения и преломления, неизбежно происходит случайная модуляция радиосигнала по амплитуде, частоте и фазе. Научная тенденция развития радиоэлектроники после II мировой войны состоит в прогрессивно возрастающем внедрении вероятностно-статистических методов.

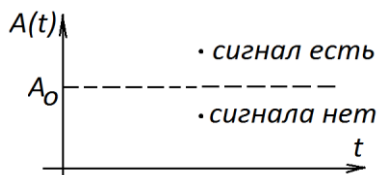
Смешанный сигнал

$$y(t) = x(t) + S(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ – шум,

$S(t)$ – полезный сигнал.

При обнаружении сигнала на фоне помех использование заранее установленного правила выбора решения связано с возможностью принятия ошибочных решений двух родов. Ошибка первого рода, называемая пропуском, состоит в том, что объявляется



отсутствие сигнала, когда в действительности он содержится в принятом процессе, но маскирован шумом [Б.Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Сов. радио, 1975, ч. II. – 386 с., см. С.256].

Допустим, полезный сигнал имеет вид

$$S(t) = A \cdot \cos(w_0 t), \text{ где } A - \text{амплитуда} \quad (2)$$

то смешанный сигнал

$$y(t) = A(t) \cdot \cos[w_0 t + \varphi(t)]. \quad (3)$$

Давайте обсудим случай, когда пытаемся обнаружить наличие полезного сигнала через амплитуду $A(t)$. Задаемся порогом A_0 , который обычно выбирается оператором.

Если $A(t) > A_0$, то считают, что сигнал есть, (4)

$A(t) < A_0$ – сигнала нет. (5)

В утверждениях (4) и (5) заложена возможность принятия ошибочных решений: случай (4) может быть и за счет выброса шума («ложная тревога»), с другой стороны, случай (5) – можем ошибочно упустить наличие полезного сигнала («пропуск»). В таких случаях вводятся вероятностные характеристики.

$W_{N,S}(A)$ – распределение амплитуды, когда есть и шум, и сигнал;

$W_{N,0}(A)$ – распределение амплитуды, когда есть только шум.

Условную вероятность ложной тревоги ищем как

$$P_{\text{ЛТ}}^y = \int_{A_0}^{\infty} W_{N,0}(A) dA. \quad (6)$$

Условная вероятность пропуска

$$P_{\text{пр}}^y = \int_0^{A_0} W_{N,S}(A) dA. \quad (7)$$

Вероятность ошибки задается в виде

$$P_{\text{ош}} = p \int_0^{A_0} W_{N,S}(A) dA + q \int_{A_0}^{\infty} W_{N,0}(A) dA; \quad (8)$$

$$P_{\text{ош}} = p \left[\int_0^{A_0} W_{N,S}(A) dA + \beta \int_{A_0}^{\infty} W_{N,0}(A) dA \right]. \quad (9)$$

Параметры p и q связаны со склонностью к ошибкам оператора на приемнике.

$$\beta = \frac{q}{p}. \quad (10)$$

Существует так называемый критерий идеального наблюдателя: обнаружение оптимально, если $P_{\text{ош}}$ минимально. Другими словами, квадратная скобка в уравнении (9) должна быть минимальной. Формулу (9) несколько изменим, пользуясь формулой теории вероятностей

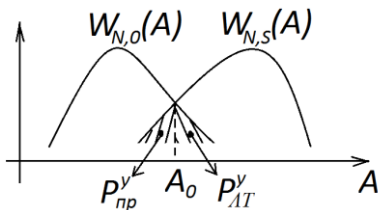
$$\int_0^{A_0} W_{N,S}(A) dA + \int_{A_0}^{\infty} W_{N,0}(A) dA = 1, \text{ то } \quad (11)$$

$$P_{\text{ош}} = p \left\{ 1 - \int_{A_0}^{\infty} [W_{N,S}(A) - \beta \cdot W_{N,0}(A)] dA \right\}. \quad (12)$$

Значит, вероятность ошибки минимальна, если квадратная скобка правой части формулы (12) больше нуля.

$$\boxed{W_{N,S}(A) \geq \beta \cdot W_{N,0}(A)}. \quad (13)$$

Формула (13) называется критерием идеального наблюдателя.



$W_{N,0}(A)$ – нормальное распределение (распределение Гаусса);

$W_{N,S}(A)$ – модифицированный закон Рэлея.

В точке A_0

$$\beta = \frac{q}{p} = 1, \quad (14)$$

т.е. сам наблюдатель не вносит дополнительных ошибок.

Перейдем к более общей задаче: «Как по результатам выборки определить принадлежность «у» к сигналу или шуму?»

За время наблюдения T находим выборки

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Вводим n -мерные функции: некоторая точка в n -мерном пространстве.

$$W_{N,0}(y) = W_{N,0}^{(n)}(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (15)$$

$$W_{N,S}(y) = W_{N,S}^{(n)}(y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (16)$$

$$\text{Вероятность ложной тревоги} \quad P_{\text{лт}}^y = \int_A W_{N,0}^{(n)}(y) dy, \quad (17)$$

$$\text{пропуска} \quad P_{\text{пр}}^y = \int_B W_{N,S}^{(n)}(y) dy. \quad (18)$$

При дальнейшем рассмотрении получим формулу типа (13), ошибка будет минимальной, если

$$\boxed{l(y) = \frac{W_{N,S}^{(n)}(y)}{W_{N,0}^{(n)}(y)} \geq \beta}. \quad (19)$$

Данное соотношение называется *отношением правдоподобия*. Прибор должен вычислять $l(y)$ и сравнить с β . Поскольку $l(y)$ представляет собой отношение двух случайных функций, то и само является случайной величиной. Это скорее *критерий Байеса*. Порог можно рассматривать как переменный порог, учитывающий изменения в наших оценках априорных вероятностей и стоимостей (потерь).

4.19. Идея обнаружения очень слабого сигнала на фоне гауссовского шума

Величина полезного сигнала относительно шума очень мала, то пишут

$$\frac{S}{N} \ll 1. \quad (1)$$

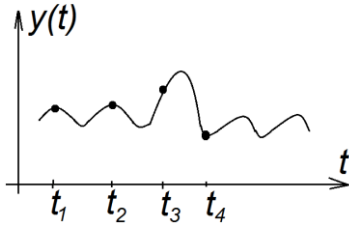
Смешанный сигнал

$$y(t) = S(t) + x(t). \quad (2)$$

Распределение шума считаем нормальным (Гауссовым), то

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (3)$$

Отношение $\frac{q}{p} = \beta$ считаем известным.



Имеем дело с n -мерным распределением. Распределение y , когда имеет место только шум

$$W_{N,0}(y) = W_{N,0}^{(n)}(y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (4)$$

Берем некоррелированные выборки

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i > \tau_k, \quad (5)$$

где τ_k – время корреляции процесса $y(t)$.

Считаем, что распределения $W_{N,0}$ и $W_{N,S}$ известны априорно, то есть изначально.

$$W_{N,0}(y) = W_{N,0}^{(n)}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n W_{N,0}(y_i) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n y_i^2\right\}. \quad (6)$$

Если есть и шум, и сигнал

$$W_{N,S}(y) = W_{N,S}^{(n)}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - S_i)^2\right\}. \quad (7)$$

В формуле (7) применяем нормальное распределение, так сигнал очень слаб. При записи правой части (7) использована идея записи среднего значения случайной величины.

Например, при $\bar{x} = \mu$

$$P(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (8)$$

Берем отношение двух распределений по формулам (7) и (6)

$$\frac{W_{N,S}(y)}{W_{N,0}(y)} = \exp\left\{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n y_i S_i\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n S_i^2\right\}. \quad (9)$$

Тогда, пользуясь формулой (19) предыдущей темы, можно записать отношение правдоподобия

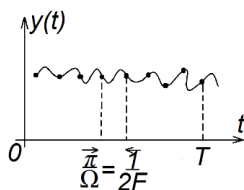
$$\boxed{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n y_i S_i \geq \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n S_i^2 + \ln \beta}. \quad (10)$$

Сигнал считаем известным точно.

Формула (10) дает «рецепт» построения экспериментального устройства для выделения сигнала на фоне гауссовского шума.

Данная формула позволяет определить лишь наличие полезного сигнала, который априорно считаем известным. То, что сигнал внутри смешанного сигнала $y(t)$ может иметься, оператору приемника заранее известно (осталось лишь определить ее наличие).

4.20. О корректности выборок при ограниченном времени наблюдения



Если время наблюдения T ограничено, то возникает вопрос о выборках n . Какое минимальное количество выборок следует брать?

Ω – верхняя граничная круговая частота спектра $y(t)$;

F – верхняя граничная простая частота спектра $y(t)$.

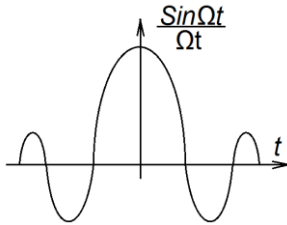
Допустим, имеем непрерывную функцию $y(t)$, спектр которой ограничен:

$$S(w) = \begin{cases} S(w) & \text{при } -\Omega < w < \Omega \\ 0 & \text{при } |w| > \Omega = 2\pi F. \end{cases} \quad (1)$$

Теорема Котельникова: всякая непрерывная функция $y(t)$ с ограниченными спектром полностью определяется своими значениями в дискретных точках, взятых через интервалы времени $\Delta t \leq \frac{1}{2F}$.

Для теории связи важно знать по этим дискретным значениям саму функцию $y(t)$.

При выполнении условий теоремы получается *ряд Котельникова*.



$$y(t) = \sum_n y\left(\frac{n}{2F}\right) \frac{\text{Sin}[2\pi Ft - n\pi]}{[2\pi Ft - n\pi]}, \quad (2)$$

$$\text{так как } \text{Sin}(2\pi Ft - 2\pi F n \Delta t) = \text{Sin}\left(2\pi Ft - 2\pi F n \frac{1}{2F}\right) = \text{Sin}[2\pi Ft - n\pi]. \quad (3)$$

По формуле (2) исходную функцию $y(t)$ разложили в бесконечный ряд, где в качестве базисной функции – функция типа $\frac{\text{Sin}\Omega t}{\Omega t}$. Каждая из этих функций смещена на определенную величину

$$\Omega n \Delta t = \Omega n \frac{1}{2F} = \Omega n \frac{1 \cdot 2\pi}{2\Omega} = n\pi. \quad (4)$$

Замечательным свойством ряда Котельникова является удобство определения коэффициентов $y\left(\frac{n}{2F}\right)$, что соответствует мгновенным экспериментальным значениям колебаний $y(t)$, отсчитанных в моменты времени $n\Delta t = n \frac{1}{2F}$. n – число выборок.

При $\Delta t \geq \frac{1}{2F}$ выборки становятся некоррелированными. Информация о $y(t)$ сохраняется, если $\Delta t \leq \frac{1}{2F}$.

4.21. Экспериментальное обнаружение сигнала на фоне гауссовского шума при ограниченном времени наблюдения

Отношение правдоподобия по формуле (10) темы «Идея обнаружения очень слабого сигнала на фоне гауссовского шума»

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n y_i S_i \geq \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n S_i^2 + \ln \beta. \quad (1)$$

Используя формулу о среднем от суммы перейдем к интегралам по времени t .

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i S_i = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) S(t) dt. \quad (2)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i^2 = \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt. \quad (3)$$

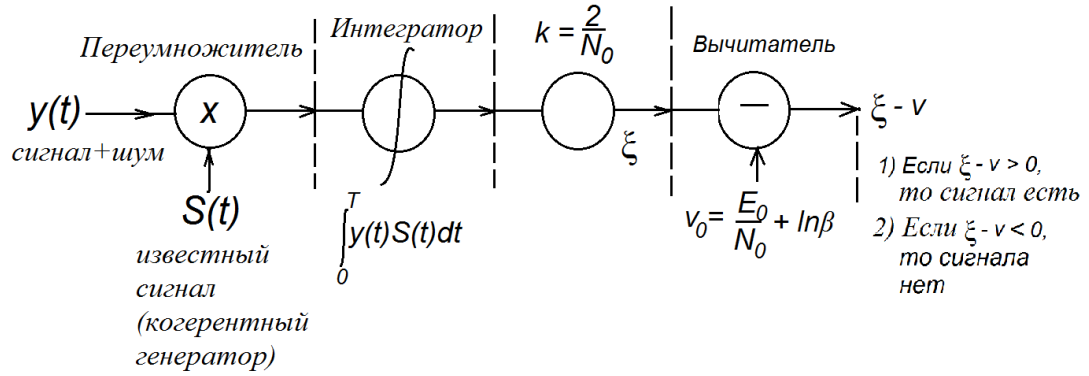
Тогда отношение правдоподобия примет вид

$$\left[\frac{2F}{\sigma^2} \int_0^T y(t) S(t) dt \geq \frac{F}{\sigma^2} \int_0^T S^2(t) dt + \ln \beta \right], \quad (4)$$

где число выборок n за время наблюдения T .

$$n = \frac{T}{\Delta t} = 2FT. \quad (5)$$

Для формулы (4) составили блок-схему установки обнаружения сигнала на фоне гауссовского шума.



N_0 – спектральная плотность шума.

$$N_0 = \frac{\sigma^2}{F}. \quad (6)$$

$$E_0 - \text{полная энергия сигнала } E_0 = \int_0^T S^2(t) dt. \quad (7)$$

Итого, для обнаружения сигнала, известного точно, на фоне гауссовского шума должно быть выполнено условие

$$\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T S(t) y(t) dt \geq \frac{E_0}{N_0} + \ln \beta = v_0 \right]. \quad (8)$$

4.22. Расчет вероятности ложной тревоги

$$P_{\text{лт}} = \int_{v_0}^{\infty} W_{N,0}(\xi) d\xi = \int_{\frac{E_0}{N_0} + \ln \beta}^{\infty} W_{N,0}(\xi) d\xi. \quad (1)$$

Распределение ξ , если существует только шум

$$W_{N,0}(\xi) = \frac{1}{\sigma_{\xi} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{2\sigma_{\xi}^2} \right\}. \quad (2)$$

$$\text{Значит, } P_{\text{лт}} = \int_{\frac{E_0}{N_0} + \ln \beta}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{\xi} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{2\sigma_{\xi}^2} \right\} d\xi. \quad (3)$$

Обычно переходят к новой переменной $k = \frac{\xi}{\sigma_{\xi}}$ с изменением предела интегрирования.

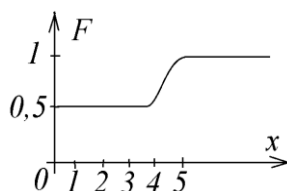
Дисперсия случайной величины ξ

$$\sigma_{\xi}^2 = \overline{\xi^2} = \frac{2E_0}{N_0}. \quad (4)$$

$$P_{\text{лт}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{E_0 + \ln \beta}{N_0}}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2}} dk, \quad (5)$$

где роль нижнего предела играет величина x (не путать с шумом)

$$x = \frac{\frac{E_0 + \ln \beta}{N_0}}{\sigma_{\xi}} = \frac{\frac{E_0 + \ln \beta}{N_0}}{\frac{\sqrt{2E_0}}{\sqrt{N_0}}}. \quad (6)$$



Интеграл (5) $P_{\text{лт}} = 1 - F(x)$, (7)

где $F(x)$ называется «интегралом ошибок»

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2}} dk. \quad (8)$$

Из графика видно, что при $x \rightarrow 0$ $F = \frac{1}{2}$

при $x \rightarrow \infty$ $F = 1$.

Формулу (7) можно записать по-другому

$$P_{\text{лт}} = 1 - F \left[\frac{\frac{E_0 + \ln \beta}{N_0}}{\frac{\sqrt{2E_0}}{\sqrt{N_0}}} \right]. \quad (9)$$

[см. книгу В.А. Котельников. Теория потенциальной помехоустойчивости. – М.: Гознергоиздат, 1956].

4.23. О путях уменьшения вероятности ложной тревоги

Рассмотрим отношение энергии сигнала E_0 за время наблюдения T к спектральной плотности шума N_0 .

$$\frac{E_0}{N_0} = \frac{P_c T}{\sigma^2 / F} = \left(\frac{P_c}{\sigma_x^2} \right)_{\text{вх}} \frac{1}{2} 2FT = \left(\frac{S}{N} \right)_{\text{вх}} \cdot \frac{n}{2}, \quad (1)$$

где $\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{вх}}$ - отношение мощности сигнала к мощности шума на входе,

n – число выборок (экспериментальных отсчетов).

Литература

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Изд. Наука, 6-ое стереотипное, 2002. – 688 с.
2. Харкевич А.А. Спектры и анализ. – М.: Изд. ЛКИ, 2007. – 240 с.
3. Корякин А.Г., Слободчикова А.А. Спецпрактикум по импульсной технике. Учебное пособие. – Якутск: изд. Якутского госуниверситета, 2005. – 98 с.
4. Садовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. основы теории и элементы системы автоматического регулирования. Учебное пособие для вузов. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.
5. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез. – М.: Радио и связь, Горячая линия – Телеком, 2004. – 608 с.
6. Якубов В.П. Статистическая радиофизика. – Томск: изд. НТЛ, 2006. – 132 с.
7. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2005. – 253 с.
8. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. – М.: Наука, 1971. – 576 с.