Контрольная работа № 1

Задача 1. Даны векторы $\overline{a}$= (2,1,0); $\overline{b}$ =(1,–1,2); $\overline{c}$= (2, 2, 1); $\overline{d}$ =(3, 7, –7) в некотором базисе. Показать, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют базис трехмерного пространства, и найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.

1. $\overline{a}=(1,2,3)$, $\overline{b}=(-1,3,2)$, $\overline{c}=(7,3,5)$, $\overline{d}=(6,10,7)$
2. $\overline{a}=(4,7,8)$, $\overline{b}=(9,1,3)$, $\overline{c}=(2,-4,1)$, $\overline{d}=(1,-13,-13)$
3. $\overline{a}=(8,2,3)$, $\overline{b}=(4,6,10)$, $\overline{c}=(3,2,1)$, $\overline{d}=(7,4,11)$
4. $\overline{a}=(10,3,1)$, $\overline{b}=(1,4,2)$, $\overline{c}=(3,9,2)$, $\overline{d}=(19,30,7)$
5. $\overline{a}=(2,4,1)$, $\overline{b}=(1,3,6)$, $\overline{c}=(5,3,1)$, $\overline{d}=(24,20,6)$
6. $\overline{a}=(1,7,3)$, $\overline{b}=(3,4,2)$, $\overline{c}=(4,8,5)$, $\overline{d}=(7,32,14)$
7. $\overline{a}=(1,-2,3)$, $\overline{b}=(4,7,2)$, $\overline{c}=(6,4,2)$, $\overline{d}=(14,18,6)$
8. $\overline{a}=(1,4,3)$, $\overline{b}=(6,8,5)$, $\overline{c}=(3,1,4)$, $\overline{d}=(21,18,33)$
9. $\overline{a}=(2,7,3)$, $\overline{b}=(3,1,8)$, $\overline{c}=(2,-7,4)$, $\overline{d}=(16,14,27)$
10. $\overline{a}=(7,2,1)$, $\overline{b}=(4,3,5)$, $\overline{c}=(3,4,-2)$, $\overline{d}=(2,-5,-13)$
11. $\overline{a}=(7,-3,5)$, $\overline{b}=(-1,3,2)$, $\overline{c}=(1,2,3)$, $\overline{d}=(6,10,17)$
12. $\overline{a}=(9,1,3)$, $\overline{b}=(4,7,8)$, $\overline{c}=(2,-4,1)$, $\overline{d}=(1,-13,-13)$
13. $\overline{a}=(4,6,10)$, $\overline{b}=(8,2,3)$, $\overline{c}=(3,-2,1)$, $\overline{d}=(7,4,11)$
14. $\overline{a}=(1,4,2)$, $\overline{b}=(10,3,1)$, $\overline{c}=(3,9,2)$, $\overline{d}=(19,30,7)$
15. $\overline{a}=(8,2,3)$, $\overline{b}=(4,6,10)$, $\overline{c}=(3,2,1)$, $\overline{d}=(7,4,11)$
16. $\overline{a}=(3,4,2)$, $\overline{b}=(1,7,3)$, $\overline{c}=(4,8,5)$, $\overline{d}=(7,32,14)$
17. $\overline{a}=(4,7,2)$, $\overline{b}=(1,-2,3)$, $\overline{c}=(6,4,2)$, $\overline{d}=(14,18,6)$
18. $\overline{a}=(6,8,5)$, $\overline{b}=(1,4,3)$, $\overline{c}=(3,1,4)$, $\overline{d}=(21,18,33)$
19. $\overline{a}=(3,1,8)$, $\overline{b}=(2,7,3)$, $\overline{c}=(2,-7,4)$, $\overline{d}=(16,14,27)$
20. $\overline{a}=(4,3,5)$, $\overline{b}=(7,2,1)$, $\overline{c}=(3,4,-2)$, $\overline{d}=(2,-5,-13)$
21. $\overline{a}=(-1,3,2)$, $\overline{b}=(1,2,3)$, $\overline{c}=(7,-3,5)$, $\overline{d}=(6,10,17)$
22. $\overline{a}=(4,7,8)$, $\overline{b}=(2,-4,-1)$, $\overline{c}=(4,7,8)$, $\overline{d}=(2,-13,-13)$
23. $\overline{a}=(3,-2,1)$, $\overline{b}=(4,6,10)$, $\overline{c}=(8,2,3)$, $\overline{d}=(7,4,11)$
24. $\overline{a}=(3,9,2)$, $\overline{b}=(1,4,2)$, $\overline{c}=(10,3,1)$, $\overline{d}=(19,30,7)$
25. $\overline{a}=(5,3,1)$, $\overline{b}=(1,3,6)$, $\overline{c}=(2,4,1)$, $\overline{d}=(24,20,6)$
26. $\overline{a}=(4,8,5)$, $\overline{b}=(3,4,2)$, $\overline{c}=(1,7,3)$, $\overline{d}=(1,32,14)$
27. $\overline{a}=(-1,2,4)$, $\overline{b}=(0,1,2)$, $\overline{c}=(1,0,3)$, $\overline{d}=(-2,4,7)$
28. $\overline{a}=(0,-1,2)$, $\overline{b}=(1,3,0)$, $\overline{c}=(2,-1,1)$, $\overline{d}=(6,12,-1)$
29. $\overline{a}=(1,-1,1)$, $\overline{b}=(2,1,-1)$, $\overline{c}=(0,3,2)$, $\overline{d}=(1,-4,4)$
30. $\overline{a}=(4,1,1)$, $\overline{b}=(2,0,-3)$, $\overline{c}=(-1,0,1)$, $\overline{d}=(-9,5,5)$

Задача 2

Дана система линейных уравнений. Доказать ее совместность и решить двумя способами:

1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

1. $\begin{cases} -2x + z = -3 \\ x - y + 2z = 4 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 6 \\ 2x + 4y - 3z = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x + 3z = 5 \\ x - y + 2z = 8 \\ 2x + 4y - 3z = -5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2x + 4z = 12 \\ x - y + 2z = 10 \\ x + 4y - 3z = -10 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -2x + 5z = 21 \\ x - y + 2z = 12 \\ 2x + 4y - 3z = -11 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -2x + 6z = 32 \\ x - y + 2z = 14 \\ 2x + 4y - 3z = -14 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -2x + 7z = 45 \\ x - y + 2z = 16 \\ 2x + 4y - 3z = -17 \end{cases}$

8. $\begin{cases} -2x + 8z = 60 \\ x - y + 2z = 18 \\ 2x + 4y - 3z = -20 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -2x - y = -5 \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + 4y - 3z = 8 \end{cases}$

11. $\begin{cases} -2x - y + z = -4 \\ x - y + 2z = 3 \\ 2x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -2x - y + 2z = -1 \\ x - y + 2z = 5 \\ 2x + 4y - 3z = 2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} -2x - y + 3z = 4 \\ x - y + 2z = 7 \\ 2x + 4y - 3z = -1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} -2x - y + 4z = 11 \\ x - y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = -4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -2x - y + 5z = 20 \\ x - y + 2z = 11 \\ 2x + 4y - 3z = -7 \end{cases}$

16. $\begin{cases} -2x - y + 6z = 31 \\ x - y + 2z = 13 \\ 2x + 4y - 3z = -10 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -2x - y + 7z = 44 \\ x - y + 2z = 15 \\ 2x + 4y - 3z = -13 \end{cases}$

$-2x + 9z = 77$
9. $x - y + 2z = 20$
$2x + 4y - 3z = -23$

$-2x - y + 9z = 76$
19. $x - y + 2z = 19$
$2x + 4y - 3z = -19$

$-2x - 2y = -8$
20. $x - y + 2z = 0$
$2x + 4y - 3z = 12$

$-2x - 2y + z = -7$
21. $x - y + 2z = 2$
$2x + 4y - 3z = 9$

$-2x - 2y + 2z = -4$
22. $x - y + 2z = 4$
$2x + 4y - 3z = 6$

$-2x - 2y + 3z = 1$
23. $x - y + 2z = 6$
$2x + 4y - 3z = 3$

$-2x - 2y + 4z = 8$
24. $x - y + 2z = 8$
$2x + 4y - 3z = 0$

$-2x - y + 8z = 59$
18. $x - y + 2z = 17$
$2x + 4y - 3z = -16$

$-2x - 2y + 5z = 17$
25. $x - y + 2z = 10$
$2x + 4y - 3z = -3$

$-2x - 2y + 6z = 28$
26. $x - y + 2z = 12$
$2x + 4y - 3z = -6$

$-2x - 2y + 7z = 41$
27. $x - y + 2z = 14$
$2x + 4y - 3z = -9$

$-2x - 2y + 8z = 56$
28. $x - y + 2z = 16$
$2x + 4y - 3z = -12$

$-2x - 3y + 9z = 71$
29. $x - y + 2z = 18$
$2x + 4y - 3z = -15$

$-2x - 3y = -13$
30. $x - y + 2z = -1$
$2x + 4y - 3z = 16$

Задача 3

1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти: 1) длины ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 ; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) уравнения прямой A_1A_2; 5) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 6) уравнения высоты, опущенной из вершин A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 8) объем пирамиды (двумя способами). Сделать чертеж.

1. $A_1(1, 3, 6)$, $A_2(2, 2, 1)$, $A_3(-1, 0, 1)$, $A_4(-4, 6, -3)$.
2. $A_1(-4, 2, 6)$, $A_2(2, -3, 0)$, $A_3(-10, 5, 8)$, $A_4(-5, 2, -4)$.
3. $A_1(7, 2, 4)$, $A_2(7, -1, -2)$, $A_3(3, 3, 1)$, $A_4(-4, 2, 1)$.
4. $A_1(2, 1, 4)$, $A_2(-1, 5, -2)$, $A_3(-7, -3, 2)$, $A_4(-6, -3, 6)$.

5. $A_1(-1, -5, 2)$, $A_2(-6, 0, -3)$, $A_3(3, 6, -3)$, $A_4(-10, 6, 7)$.
6. $A_1(0, -1, -1)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(1, -5, -9)$, $A_4(-1, -6, 3)$.
7. $A_1(5, 2, 0)$, $A_2(2, 5, 0)$, $A_3(1, 2, 4)$, $A_4(-1, 1, 1)$.
8. $A_1(2, -1, -2)$, $A_2(1, 2, 1)$, $A_3(5, 0, -6)$, $A_4(-10, 9, -7)$.
9. $A_1(-2, 0, -4)$, $A_2(-1, 7, 1)$, $A_3(4, -8, -4)$, $A_4(1, -4, 6)$.
10. $A_1(14, 4, 5)$, $A_2(-5, -3, 2)$, $A_3(-2, -6, -3)$, $A_4(-2, 2, -1)$.
11. $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(3, 0, -3)$, $A_3(5, 2, 6)$, $A_4(8, 4, -9)$.
12. $A_1(2, -1, 2)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(3, 2, 1)$, $A_4(-4, 2, 5)$.
13. $A_1(1, 1, 2)$, $A_2(-1, 1, 3)$, $A_3(2, -2, 4)$, $A_4(-1, 0, -2)$.
14. $A_1(2, 3, 1)$, $A_2(4, 1, -2)$, $A_3(6, 3, 7)$, $A_4(7, 5, -3)$.
15. $A_1(1, 1, -1)$, $A_2(2, 3, 1)$, $A_3(3, 2, 1)$, $A_4(5, 9, -8)$.
16. $A_1(1, 5, -7)$, $A_2(-3, 6, 3)$, $A_3(-2, 7, 3)$, $A_4(-4, 8, -12)$.
17. $A_1(-3, 4, -7)$, $A_2(1, 5, -4)$, $A_3(-5, -2, 0)$, $A_4(2, 5, 4)$.
18. $A_1(-1, 2, -3)$, $A_2(4, -1, 0)$, $A_3(2, 1, -2)$, $A_4(3, 4, 5)$.
19. $A_1(4, -1, 3)$, $A_2(-2, 1, 0)$, $A_3(0, -5, 1)$, $A_4(3, 2, -6)$.
20. $A_1(1, -1, 1)$, $A_2(-2, 0, 3)$, $A_3(2, 1, -1)$, $A_4(2, -2, -4)$.
21. $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(1, -1, 2)$, $A_3(0, 1, -1)$, $A_4(-3, 0, 1)$.
22. $A_1(1, 0, 2)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(2, -2, 1)$, $A_4(2, 1, 0)$.
23. $A_1(1, 2, -3)$, $A_2(1, 0, 1)$, $A_3(-2, -1, 6)$, $A_4(0, -5, -4)$.
24. $A_1(3, 10, -1)$, $A_2(-2, 3, -5)$, $A_3(-6, 0, -3)$, $A_4(1, -1, 2)$.
25. $A_1(-1, 2, 4)$, $A_2(-1, -2, -4)$, $A_3(3, 0, -1)$, $A_4(7, -3, 1)$.
26. $A_1(0, -3, 1)$, $A_2(-4, 1, 2)$, $A_3(2, -1, 5)$, $A_4(3, 1, -4)$.
27. $A_1(1, 3, 0)$, $A_2(4, -1, 2)$, $A_3(3, 0, 1)$, $A_4(-4, 3, 5)$.
28. $A_1(-2, -1, -1)$, $A_2(0, 3, 2)$, $A_3(3, 1, -4)$, $A_4(-4, 7, 3)$.
29. $A_1(-3, -5, 6)$, $A_2(-1, 1, 3)$, $A_3(2, -2, 4)$, $A_4(-1, 0, -2)$.
30. $A_1(2, -4, -3)$, $A_2(5, -6, 0)$, $A_3(-1, 3, -3)$, $A_4(-10, -8, 7)$.

Задача 4. Установить вид кривых, заданных уравнениями. Привести уравнения кривых к каноническому виду и изобразить их на чертеже

1

а) $10x^2 + 9y^2 - 90 = 0$;   б) $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$;
в) $x^2 + 2y^2 + 1 = 0$;   г) $y^2 - 10x + 10 = 0$;
д) $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$;   е) $6y^2 - 7x - 84 = 0$.

2

а) $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$;   б) $2x^2 + 3y^2 - 18 = 0$;
в) $2x^2 + 2x + 3y + 5 = 0$;   г) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$;
д) $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$;   е) $y^2 - 6y + x = 0$.

3

а) $2x^2 + 2y = 2(x - 1)^2 + y^2$;   б) $5x^2 - 4y^2 - 20 = 0$;
в) $x^2 + 5y^2 = 0$;   г) $9x^2 + 8y^2 - 72 = 0$;
д) $x^2 - 6x - 8y - 15 = 0$;   е) $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 14 = 0$.

4

а) $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$;   б) $25x^2 + 16y^2 = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 6y + 6 = 0$;
г) $7x^2 + 4y^2 - 28 = 0$;
д) $9x^2 - 4y^2 + 8y - 40 = 0$;
е) $x^2 - x - y = 0$.

5

а) $2x^2 + 3y^2 + 4x + 8 = 0$;
б) $x^2 - 2y^2 - 4y - 2 = 0$;
в) $8x^2 - 9y + 11 = 0$;
г) $48y^2 - 72y - 30x + 107 = 0$;
д) $x^2 - y^2 - 4 = 0$;
е) $x^2 + y^2 - 16 = 0$.

6

а) $x^2 - y^2 - x + y = 0$;
б) $3x^2 + y^2 - 3 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$;
г) $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 = 0$;
д) $x^2 + 2x + 3y = 0$;
е) $3x^2 + 10y^2 + 2 = 0$.

7

а) $x^2 + 2x + 2y = 0$;
б) $x^2 - y^2 + 4x - 13 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 6y = 0$;
г) $8x^2 + 9y^2 - 36y - 36 = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$;
е) $y^2 - 4y + x = 0$.

8

а) $10x^2 + 9y^2 + 20x - 71 = 0$;
б) $9x^2 - 7y^2 - 54x + 70y - 157 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$;
г) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 6x + 12 = 0$;
е) $8y^2 + 2x + 4y = 0$.

9

а) $2y^2 + 3x + 3 = 0$;
б) $3x^2 + 12y^2 - 108 = 0$;
в) $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$;
г) $x^2 - y^2 + 2x = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$;
е) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 19 = 0$.

10

а) $x^2 + y^2 - 9 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + 9 = 0$;
в) $3x^2 + 5y^2 = 0$;
г) $y^2 - x^2 + 6y + 5 = 0$;
д) $x^2 + 3y^2 + 2x = 0$;
е) $3x^2 + 45y - 90 = 0$.

2.11

а) $x^2 - y^2 - x + y = 0$;
б) $3x^2 + y^2 - 3 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$;
г) $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 = 0$;
д) $x^2 + 2x + 3y = 0$;
е) $3x^2 + 10y^2 + 2 = 0$.

12

а) $x^2 - y^2 + 8 = 0$;
б) $49x^2 + 25y^2 - 50y + 1200 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$;
г) $7x^2 + 5y^2 = 0$;
д) $x^2 + 14x - 9y = 0$;
е) $3x^2 + 3y^2 + 7 = 0$.

13

а) $x^2 - x - y + 2 = 0$;
б) $x^2 - y^2 + 2x - 6y - 8 = 0$;
в) $16x^2 - 4y^2 + 80y - 164 = 0$;
г) $16x^2 + 9y^2 + 90y + 81 = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$;
е) $3x^2 + y^2 - 12y + 46 = 0$.

14

а) $y^2 - 2x - 2y + 7 = 0$;
б) $x^2 - 2y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$;
в) $36x^2 + 4y^2 - 72y - 40x - 41 = 0$;
г) $x^2 + 2y^2 + 4x + 5 = 0$;
д) $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$;
е) $16x^2 + 9y^2 + 144 = 0$.

15

а) $x^2 + 4y^2 - 6x - 391 = 0$;
б) $x^2 - y^2 - 4x - 6y - 6 = 0$;
в) $x^2 - 3y^2 - 2x = 0$;
г) $3x^2 + 3x + 2y = 0$;

д) $x^2 + y^2 + 10y + 20 = 0$;

е) $y^2 - 16y + 8x = 0$.

16

а) $x^2 - 6x - 8y + 49 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 16x - 18y + 129 = 0$;

в) $x^2 - 4y^2 - 16x + 32y + 2 = 0$;

г) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$;

д) $x^2 + y^2 + 2y + 2 = 0$;

е) $4x^2 + y^2 - 64x + 4y + 259 = 0$.

17 x

а) $9x^2 - y^2 - 144x + 6y + 531 = 0$;

б) $x^2 + y^2 + 16x + 12y + 100 = 0$;

в) $9x^2 + y^2 + 18x + 6y - 18 = 0$;

г) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$;

д) $x^2 + 2x - 2y = 0$;

е) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 3 = 0$.

18

а) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 6y - 3 = 0$;

в) $3x^2 - y^2 - 6x - 4y - 10 = 0$;

г) $5x^2 + y^2 - 10x + 4y - 16 = 0$;

д) $x^2 + x - y = 0$;

е) $y^2 + 2x - 2 = 0$.

19

а) $x^2 + y^2 - 6 = 0$;

б) $3x^2 - 2y^2 - 8y - 20 = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$;

г) $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y = 0$;

д) $x^2 - x - y - 1 = 0$;

е) $2y^2 + x + 4y + 3 = 0$.

20

а) $x^2 + x + 3y + 5 = 0$;

б) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 45 = 0$;

в) $2x + y - y^2 = 0$;

г) $9x^2 + 4y^2 - 54x + 45 = 0$;

д) $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$;

е) $x^2 + y^2 + 20y + 84 = 0$.

21

а) $x^2 + y^2 + 6y + 9 = 0$;

б) $x^2 + 2x + 6y + 9 = 0$;

в) $x^2 + y^2 + 5 = 0$;

г) $x^2 + 4y^2 - 10x - 24y + 57 = 0$;

д) $x + 4y - y^2 - 4 = 0$;

е) $y^2 - x^2 - 25 = 0$.

22

а) $x + x^2 - y = 0$;

б) $x^2 - y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$;

в) $2y - y^2 + 3x - 1 = 0$;

г) $9x^2 - 18x + 4y^2 - 16y - 11 = 0$;

д) $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$;

е) $x^2 + y^2 + 3 = 0$.

23

а) $4x^2 + y^2 - 16x - 6y + 21 = 0$;

б) $x^2 + y^2 + 10x - 56 = 0$;

в) $x^2 - y^2 + 10x - 56 = 0$;

г) $x + y - 18y^2 + 5 = 0$;

д) $2x^2 - 4x + 3y = 0$;

е) $x^2 + 10y^2 + 2x + 20y + 11 = 0$.

24

а) $x + 2y - x^2 + 3 = 0$;

б) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y + 5 = 0$;

в) $y^2 - 3x + 4y = 0$;

г) $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 27 = 0$;

д) $4x^2 - 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$;

е) $x^2 + (y + 1)^2 = 0$.

25

а) $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y = 0$;

б) $9x^2 - 4y^2 - 8y - 40 = 0$;

в) $x^2 + y^2 + 20x = 0$;

г) $x^2 - y^2 + 6y - 73 = 0$;

д) $x^2 - 2x - 2y = 0$;

е) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y + 61 = 0$.

26

а) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 11 = 0$;

б) $x^2 + 4x + y^2 + 6y + 12 = 0$;

в) $x^2 - 8x - y + 15 = 0$;

г) $x^2 - 4y^2 - 2x - 24y - 39 = 0$;

д) $4x^2+9y^2+40x+108y+388=0$;
е) $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$.

27

а) $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$;
б) $x^2 - 4x + y = 0$;
в) $3x^2 + 4y^2 - 6x + 15 = 0$;
г) $5x^2+6y^2+10x-12y-19=0$;
д) $x^2 - 2y^2 - 4 = 0$;
е) $2x - y^2 - 4y = 0$.

28

а) $x^2 + 4y^2 + 4x + 1 = 0$;
б) $x^2 - y^2 - 2x - 4y = 0$;
в) $y^2 + y - x + 5 = 0$;
г) $x^2 + 2x - y - 2 = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 2y + 5 = 0$;
е) $x^2 - 2y^2 - 4x - 1 = 0$.

29

а) $y^2 - 2x - 1 = 0$;
б) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$;
в) $x^2 - y^2 + 2x + 2y - 5 = 0$;
г) $8x^2 - 2x + y^2 = 0$;
д) $x^2 + 3x - y + 1 = 0$;
е) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$.

30

а) $x^2 + y^2 + 3x + y = 0$;
б) $x^2 + 2y^2 - 4y = 0$;
в) $x^2 - 4y^2 - 8y - 4 = 0$;
г) $x^2 - y^2 + 2y + 1 = 0$;
д) $5x^2+4y^2+30x-8y+49=0$;
е) $2x^2+3y^2-8x+6y+17=0$.

Задача 5. Перейти к полярным координатам и построить линии

1. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
2. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$
3. $(x^2 + y^2)^2 = 18xy$
4. $x^2 + y^2 = 2ax$
5. $y^2 = \frac{2}{3}x$
6. $x^2 + y^2 = 4y$
7. $y^2 = 4ax$
8. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$
9. $x^2 + y^2 + x + y = 0$
10. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$
11. $x^2 + y^2 = 8x$
12. $x^2 - y^2 = a^2$
13. $x^2 + y^2 = a^2$
14. $x^2 + y^2 = ay$
15. $y = x$
16. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$
17. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$
18. $y^2 = 6x$
19. $x^2 + y^2 = x$
20. $x^2 + y^2 = 5y$

21. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

22. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$

23. $y^2=x$

24. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{80}=1$

25. $x^2+y^2=x+y$

26. $x^2+y^2+x-y=0$

27. $x^2+y^2+4y=0$

28. $x^2+y^2-x+y=0$

29. $x^2+y^2=-3x$

30. $x^2+y^2=-y$

Задача 5.

Вариант 1.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2-3x-7}{4x^2-2x+8}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2-2}{4x^3-4x+3}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{3\sin\frac{1}{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\ln(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)\left(\sqrt{4+x^2}-x\right)$

Вариант 2.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+5x-1}{x^2+x+1}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^6+5x^2-1}{4x^7+4x+5}$

3) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-49}{2x^2-18x+28}$

4) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{8+7x-x^2}{x^2-9x+8}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{3x+4}-4}{x^2-6x+8}$

6) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-9x+18}{\sqrt{3x-2}-4}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}^2 x}{x\sin 2x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin^2\frac{x}{2}}{1-\cos x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+5}\right)^{\frac{x}{2}}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$

Вариант 3.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-4x^2+1}{2x^5+3x^2-x}$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+9x-3}{7x^2-2x-4}$

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}x}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}3x}{\sin 5x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\,\mathrm{tg}2x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{3x-10}{3x+2}\right)^{2x-5}$

10) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$

Вариант 4.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+(x+3)^2}{2x^2+6}$

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+x-5}{x-3}$

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-4}{4+3x-x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-3x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x}$

6) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{\sqrt{2x-1}-3}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\arcsin^2 x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot\sin 2x}{\mathrm{tg}^2 3x}$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+1}\right)^n$

10) $\lim\limits_{x\to\infty} 2x\left(\ln(x-2)-\ln x\right)$

Вариант 5.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^5+1}{2-4x^2+6x}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+\left((n+2)^3\right)}{n^3+4}$

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-8x-10}{x^2-25}$

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 3x}$

7) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-5}-\sqrt{7-x}}{x-6}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^3 8x}{x^3+4x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$ 10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x-2\right)^{\frac{x}{x-1}}$

Вариант 6.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x}{4x^3-2x-7}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-3x}{4x^3+2x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{6x-x^2-5}$

5) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{2x+9}-1}{x^2+2x-8}$ 6) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\arcsin^2 x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\frac{x}{2}}{2x^3}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+4}\right)^{x+2}$ 10) $\lim\limits_{x\to\infty}2x\left(\ln(x+3)-\ln(x+4)\right)$

Вариант 7.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-x^3}{(x-1)^3+x^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-3x+5}{3x^2+2x-5}$

3) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$ 4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$

5) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin 3x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin 2x\operatorname{ctg}^2 5x$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-4)\ln\dfrac{x+2}{x-4}$

9) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$ 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-x\right)$

Вариант 8.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{21+100n^2}{1+n^2+4n^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-x-1}{x^2+3x-5}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\operatorname{tg}2x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{\sin 5x}$

8) $\lim\limits_{x\to -10}(x+11)^{\frac{x+9}{x+10}}$

9) $\lim\limits_{x\to -\infty}(2-3x)[\ln(1-3x)-\ln(2-3x)]$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x-4)\left(\sqrt{x^2-6}-x\right)$

Вариант 9.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2+3x+1}{x^2-7x-5}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2+1}{(2x+1)^2}$

3) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{2x^2+7x-30}{3x^2+20x+12}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cdot\operatorname{ctg}3x$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{arctg}6x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\operatorname{tg}3x}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}x\ln\dfrac{2x-5}{2x+5}$

10) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2x}{x-1}}$

Вариант 10.

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1000x^3+3x^2}{0{,}001x^4-10x^3+1}$

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-3x-8}{x^2+2x+7}$

3) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x\cdot\operatorname{ctg}2x}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 12x}{\operatorname{arctg}3x}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}(4x+9)^{\frac{3x+5}{x+2}}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}(3x+2)[\ln(x+3)-\ln(x+4)]$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{3+x^2}-x\right)$

Вариант 11.

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-3x+5}{3x^2+2x-5}$

2) $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{(n+1)^3-n^3}{(n-1)^3+n^3}$

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^e+x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^e+9}-3}{\sqrt{x^e+25}-5}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\cdot \operatorname{tg} 2x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$ 8) $\lim\limits_{x\to -10}(x+11)^{\frac{x+9}{x+10}}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}(2-3x)[\ln(1-3x)-\ln(2-3x)]$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x}\right)$

Вариант 12.

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-2x+1}{5x^2-x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg} 5x}{\sin 2x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 7x}{4x}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln x]$ 10) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{x+4}$

Вариант 13.

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2-3x+1}{4x^2+2x-9}$ 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3n^2+15n}{4n^3+n^2+1}$

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-14x+45}{x^2-6x+5}$ 4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot \operatorname{ctg} 5x$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\cdot \operatorname{tg} 3x}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}(x+3)[\ln(x+1)-\ln(x-2)]$ 10) $\lim\limits_{x\to -1}(5+4x)^{\frac{x}{x+1}}$

Вариант 14.

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4+5x^2-3}{3x^3-2x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-1}{3x^2+x-5}$

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$ 4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{2-\sqrt{2x-6}}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^3 x-\cos^5 x}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\arcsin 3x}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+2)}-x)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)\left[\ln(x-3)-\ln x\right]$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^{5x+1}$

Вариант 15.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-3x-7}{4x^2-2x+8}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2n^3-7n^2-2}{6n^3-4n+3}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{4}}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\ln(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)(\sqrt{4+x^2}-x)$

Вариант 16.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-7x+x^2}{2+2x+x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$

5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$

6) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\operatorname{tg} x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)\left[\ln(x+5)-\ln x\right]$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$

Вариант 17.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+1}{6x^2+3x-4}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-2x-3}$

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$

5) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{1-x}}$

6) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2 \frac{x}{9}}{x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin 3x \cdot \operatorname{ctg}^2 2x$

9) $\lim\limits_{x\to 1} (3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$

10) $\lim\limits_{x\to \infty} (3x-2)\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$

Вариант 18.

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{9x^5+4x^4+2}{3x^5+2x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4-3x^2+2}{5x^4-x^3-3x}$

3) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$

5) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 10x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 7x}{5x}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

9) $\lim\limits_{x\to 2} (2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$

10) $\lim\limits_{x\to \infty} (x+5)\left[\ln(2x-3)-\ln(2x+3)\right]$

Вариант 19.

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+4x-x^2}{x+3x^2+2x^4}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+4x-5}{6x^2-2x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$

4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin 2x}{1-\cos x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 5x}{10x}$

9) $\lim\limits_{x\to 5} \left(\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2x^2}{x^2-25}\right)$

10) $\lim\limits_{x\to \infty} (2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$

Вариант 20.

1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x-9}{2x^2-5x+6}$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1-4n-n^4}{n+3n^2+2n^4}$

4) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$

5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{5x}$

8) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{2x}{x-3}}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\left[\ln(2x-3)-\ln(2x+1)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$

Вариант 21.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2+3x+1}{x^2-7x+5}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5n^2+1}{(2n+1)^2}$

3) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{2x^2+7x-30}{3x^2+20x++12}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cdot\operatorname{ctg}3x$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg}6x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin 3x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}3x}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(2x-5)-\ln(2x+5)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2x}{x-1}}$

Вариант 22.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^5-2x^2+5}{5x^2+2x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^3-2x+3}{x+5}$

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-4x-5}$

4) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-4x-12}{x^2-8x+12}$

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}5x}{1-\cos 4x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x(1-\cos 4x)}{x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\ln(x+2)-\ln x\right)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{x}{2-x}}$

Вариант 23.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3n^5-4n^2+1}{2n^5+3n^2-n}$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+9x-3}{7x^2-2x+4}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{5x}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-5)[\ln(3x-10)-\ln(2+3x)]$

8) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$

9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\cdot \operatorname{tg} 2x}$

Вариант 24.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+4x+1}{x^3-2x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-4x^2+1}{6x^2+3x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-x-6}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cdot \operatorname{ctg} 15x$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}\frac{1}{3}x}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+4)[\ln(x+7)-\ln(x-3)]$

10) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x-1}}$

Вариант 25.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1+2x-x^2}{x+3}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+2x-4}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$

4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-2x-8}$

5) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$

6) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 6x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 11x}{7x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)[\ln(x+2)-\ln x]$

10) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$

Вариант 26.

1) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+7x+9}{2x^2-5x-3}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-2n^4}{(n+1)^3+n^4}$

3) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin 2x\cdot \operatorname{ctg}^2 3x$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{3x}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}(3x+7)^{\frac{5x}{4-x^2}}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\left[\ln(3-2x)-\ln(4-2x)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

Вариант 27.

1) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-3x-8}{x^2+2x+7}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$

3) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x\cdot \mathrm{ctg}\, 2x}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\mathrm{arctg}\, 3x}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}(x\sqrt{3+x^2}-x)$

9) $\lim\limits_{x\to -2}(4x+9)^{\frac{3x+5}{x+2}}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)\left[\ln(x+3)-\ln(x+4)\right]$

Вариант 28.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+8}{2x^6+x^3-x}$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{8x^3-4x^2+11}{2x^3+2x-5}$

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$

5) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$

6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\, 6x}{5x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-2)\left[\ln(x-2)-\ln(x+1)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{3x}{x-3}}$

Вариант 29.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3+8x-2}{x^3-2x^2+1}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-4x^2+3}{x^4+1}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$

6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{3x}-3}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} x\, \mathrm{ctg}\, 5x$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(3-x)\left[\ln(1-x)-\ln(2-x)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{5x}{x-1}}$

Вариант 30.

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^5-3x^2+1}{2x^5-2x+3}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$

3) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{3x^2-17x-28}{x^2-9x+14}$

4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$

5) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\frac{x}{2}}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{16x}{\mathrm{arctg}2x}$

8) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{4}{1-x^2}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-2)\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{x}{x-1}}$

Задача 6. Задана функция и два значения аргумента x_1 и x_2. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений; 2) в случае разрыва найти ее односторонние пределы в точке разрыва; 3) сделать схематический чертеж.

1. $y=\dfrac{4x}{x-1};\ x_1=1,\ x_2=3.$

2. $y=\dfrac{4x}{x-2};\ x_1=2,\ x_2=5.$

3. $y=\dfrac{4x}{x-3};\ x_1=3,\ x_2=-2.$

4. $y=\dfrac{4x}{x-4};\ x_1=-2,\ x_2=4.$

5. $y=\dfrac{4x}{x-5};\ x_1=-1,\ x_2=5.$

6. $y=\dfrac{4x}{x+1};\ x_1=-1,\ x_2=3.$

7. $y=\dfrac{4x}{x+2};\ x_1=-2,\ x_2=2.$

8. $y=\dfrac{4x}{x+3};\ x_1=1,\ x_2=-3.$

9. $y=\dfrac{4x}{x+4};\ x_1=-4,\ x_2=4.$

10. $y=\dfrac{4x}{x+5};\ x_1=-5,\ x_2=5.$

11. $y=4^{\frac{1}{x-5}};x_1=5,x_2=7.$

12. $y=3^{\frac{1}{x-2}};x_1=2,x_2=3.$

13. $y=7^{\frac{1}{x-4}};x_1=4,x_2=5.$

14. $y=8^{\frac{1}{x-3}};x_1=3,x_2=6.$

15. $.\,y=9^{\frac{1}{x-7}};x_1=7,x_2=9.$

16. $y=16^{\frac{1}{x-2}};x_1=2,x_2=6.$

17. $.\,y=3^{\frac{1}{x-4}};x_1=4,x_2=6.$

18. $y=9^{\frac{1}{x-6}};x_1=6,x_2=8.$

19. $y = 7^{\frac{1}{x-3}}; x_1 = 3, x_2 = 5.$

20. . $y = 8^{\frac{1}{x-2}}; x_1 = 2, x_2 = 5.$

21. $y = 9^{\frac{1}{2-x}};\ x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$

22. $y = 4^{\frac{1}{3-x}}; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$

23. $y = 12^{\frac{1}{x}}; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$

24. $y = 3^{\frac{1}{4-x}}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4.$

25. $y = 8^{\frac{1}{5-x}}; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 5.$

26. $y = 10^{\frac{1}{7-x}}; \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 7.$

27. $y = 14^{\frac{1}{6-x}}; \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 6.$

28. $y = 15^{\frac{1}{8-x}}; \quad x_1 = 6, \quad x_2 = 8.$

29. $y = 11^{\frac{1}{4+x}}; \quad x_1 = -4, \quad x_2 = -2.$

30. $y = 13^{\frac{1}{5+x}}; \quad x_1 = -5, \quad x_2 = -3.$

Задача 7. Задана функция различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Требуется найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

1. $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{если } x\le 0; \\ x, & \text{если } 0<x\le 2; \\ 2x-2, & \text{если } x>2. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} -3x, \text{если} & x<0;; \\ \mathrm{tg}x, \text{если} & 0<x\le \dfrac{\pi}{4}; \\ 2, \text{если} & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} \sin x, \text{если} & x\le 0; \\ 2x, \text{если} & 0<x\le 1; \\ x, \text{если} & x>1. \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} \cos x, \text{если} & x\le 0; \\ x^2+1, \text{если} & 0<x\le 1; \\ x, \text{если} & x>1. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, \text{если} & x\le 0; \\ \mathrm{tg}x, \text{если} & 0\le x<\dfrac{\pi}{4}; \\ 1, \text{если} & x\ge \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} -3x, & \text{если} & x\le 1, \\ x^2-4, & \text{если} & 1<x<3, \\ 2x-5, & \text{если} & x\ge 3. \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если} & x<-2, \\ 4-x^2, & \text{если} & -2\le x\le 1, \\ 3-2x, & \text{если} & x>1. \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{если} & x\le 0, \\ x^2+1, & \text{если} & 0<x\le 1, \\ 2, & \text{если} & x>1. \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{если} & x\le 0, \\ \sqrt{x}, & \text{если} & 0<x<4, \\ 1, & \text{если} & x\ge 4. \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} -x^2, & \text{если} & x\le 0, \\ tgx, & \text{если} & 0<x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 2, & \textit{если} & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} -(x+1), & \text{если} & x\le -1, \\ (x+1)^2, & \text{если} & -1<x\le 0, \\ x, & \text{если} & x>0. \end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если} & x\le -2, \\ x^2-4, & \text{если} & -2<x\le 1, \\ 4-2x, & \text{если} & x\ge 1. \end{cases}$

7. $$f(x)=\begin{cases}-3-x, & \text{если} \quad x<-2,\\ x^2-5, & \text{если} \quad -2\le x\le 3,\\ 7-2x, & \text{если} \quad x>3.\end{cases}$$

8. $$f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{если} \quad x<-1,\\ x^2, & \text{если} \quad -1\le x\le 2,\\ 6-x, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

9. $$f(x)=\begin{cases}2-x, & \text{если} \quad x<0,\\ \sin x, & \text{если} \quad 0\le x<\pi,\\ x-\pi, & \text{если} \quad x\ge\pi.\end{cases}$$

10. $$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{если} \quad x<0,\\ \sin x, & \text{если} \quad 0\le x\le\pi,\\ -3, & \text{если} \quad x>\pi.\end{cases}$$

11. $$f(x)=\begin{cases}x^2, & \textit{если} \quad x\le 0,\\ \cos x, & \textit{если} \quad 0<x<\pi,\\ -1, & \textit{если} \quad x\ge\pi.\end{cases}$$

12. $$f(x)=\begin{cases}-x, & \textit{если} \quad x\le 0,\\ -(x-1)^2, & \textit{если} \quad 0<x<2,\\ x-3, & \textit{если} \quad x\ge 2.\end{cases}$$

13. $$f(x)=\begin{cases}2x^2, \text{ если} \quad x\le 0;\\ \cos x, \text{если} \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{2};\\ x-\dfrac{\pi}{2}, \text{если} \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

14. $$f(x)=\begin{cases}3x+1, \text{ если} \quad x\le 0;\\ x^2+1, \text{если} \quad 0<x\le 1;\\ 1, \text{ если } x>1.\end{cases}$$

15. $$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{3}, \text{если } x\le 0;\\ \sin x, \text{если} \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{2};\\ x-\dfrac{\pi}{2}, \text{если } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

22. $$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{если} \quad x\le 0,\\ \sin x, & \text{если} \quad 0<x\le\pi,\\ x-2, & \text{если} \quad x>\pi.\end{cases}$$

23. $$f(x)=\begin{cases}x+2, & \text{если} \quad x<-1,\\ x^2+1, & \text{если} \quad -1\le x\le 1,\\ 3-x, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$$

24. $$f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{если} \quad x\le 0,\\ \cos x, & \text{если} \quad 0<x<\pi/2,\\ 2, & \text{если} \quad x\ge\pi/2.\end{cases}$$

25. $$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{если} \quad x<0,\\ \cos x, & \text{если} \quad 0\le x\le\pi/2,\\ x-\pi/2, & \text{если} \quad x>\pi/2.\end{cases}$$

26. $$f(x)=\begin{cases}x+4, & \text{если} \quad x<-1,\\ x^2+2, & \text{если} \quad -1\le x\le 1,\\ 2x, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$$

27. $$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{если} \quad x\le 0,\\ x^2, & \text{если} \quad 0<x<2,\\ x+1, & \text{если} \quad x\ge 2.\end{cases}$$

28. $$f(x)=\begin{cases}-2x, & \text{если} \quad x<-1,\\ x^2+1, & \text{если} \quad -1\le x\le 2,\\ x-1, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

29. $$f(x)=\begin{cases}-x, \text{если} \quad x\le 0;\\ x^2, \text{ если } 0<x\le 2;\\ x+1, \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

30. $$f(x)=\begin{cases}x^2+1, \text{если } x\le 0;\\ 1, \text{ если } 0<x\le 2;\\ x-2, \text{ если } x>2.\end{cases}$$

Задача 8. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций:

1. а) $y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}$; б) $y = \sin\sqrt{3} + \frac{1}{3}\frac{\sin^3 3x}{\cos 6x}$;

в) $y = (\mathrm{arctg}x)^{\frac{1}{2}\ln \mathrm{arctg}x}$; г) $xy = \ln(e^x + e^y)$.

2. а) $y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$; б) $y = \mathrm{tglg}\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$;

в) $y = (\sin x)^{5e^x}$; г) $x^3 + y^3 - x^2 y = 0$.

3. а) $y = \sqrt[3]{x^4 + 5x} - \sqrt[4]{(5x-1)^3}$ б) $y = \frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}$

в) $y = x^{\frac{2}{x}}$ г) $x \cdot \sin y - y \cdot \cos x = 0$

4. а) $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ б) $y = \mathrm{arctg}\frac{1}{x}$

в) $y = x^{\arcsin x}$ г) $y \cdot \sin x + \cos(x-y) = \cos y$

5. а) $y = x + \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$ б) $y = \sin\sqrt{1+x^2}$

в) $y = x^{\frac{1}{x^2}}$ г) $x \cdot e^y + ye^x = xy$

6. а) $y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{1+x}}$ б) $y = \frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$

в) $y = (\ln x)^x$ г) $xy + \ln y - 2\ln x = 0$

7. а) $y = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$ б) $y = x \cdot \arcsin\frac{2x+1}{3}$

в) $y = (\mathrm{arctg}2x)^{\sin 3x}$ г) $(x+y)^2 = (x+2y)^3$

8. а) $y = x \cdot \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$ б) $y = \frac{1}{\mathrm{tg}^2 2x}$

в) $y = x^{\ln x}$ г) $y \cdot \sin x = \cos(x-y)$

9. а) $y = \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$ б) $y = \frac{\sin^2 x}{2 + 3\cos^2 x}$

в) $y = (\ln x)^x$ г) $(e^x - 1)(e^y - 1) - 1 = 0$

10. а) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ б) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2x+\ln\cos x$

в) $y=\left(x+x^2\right)^x$ г) $x-y+x\cdot\sin y=0$

11. а) $y=5\cdot\sqrt[5]{\dfrac{x^2+x+1}{x}}$ б) $y=2^x\cdot e^{-x}$

в) $y=(\cos x)^x$ г) $\ln y=\operatorname{arctg}x/y$

12. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{3x-5}}$ б) $y=\left(1+\operatorname{ctg}^2 3x\right)e^{-x}$

в) $y=\left(\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)^x$ г) $(x+y)^2+(x-3y)^2=0$

13. а) $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^2}}$; б) $y=\cos\operatorname{ctg}2-\dfrac{1}{16}\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$

в) $y=x^{\arcsin x}$; г) $xy+\arcsin(x+y)=0.$

14. а) $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^2}}$; б) $y=\cos\operatorname{ctg}2-\dfrac{1}{16}\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$

в) $y=x^{\arcsin x}$; г) $xy+\arcsin(x+y)=0.$

15. а) $y=\dfrac{(x^2-6)\sqrt{(1+x^2)^3}}{120x^5}$; б) $y=\dfrac{\cos\ln 7\sin^2 7x}{7\cos 14x}$;

в) $\underline{y=(\operatorname{ctg}3x)^{2e^x};}$ г) $\cos\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{x}.$

16. а) $y=\dfrac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^2}$; б) $y=\cos\operatorname{ctg}2-\dfrac{\cos^2 8x}{16\sin 16x}$;

в) $y=x^{e^{\operatorname{tg}x}}$; г) $(x+y)^2+(x-3y)^3=0.$

17. а) $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$; б) $y=\operatorname{ctg}\cos 2+\dfrac{\sin^2 6x}{6\cos 12x}$;

в) $y=(tgx)^{4e^x}$; г) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1;$

18. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(1+x^{\frac{3}{4}})^2}{x^{\frac{3}{2}}}}$; б) $y=\sqrt[3]{ctg2}-\dfrac{1}{20}\dfrac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$;

в) $y=(\cos 5x)^{e^x}$; г) $4xy+4x-4y+4=0.$

19. а) $y=\dfrac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$; б) $y=\ln\sin\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos^2 12x}{24\sin 24x}$;

в) $y=(x-5)^{cox}$; г) $xe^y+ye^x=xy$.

20. а) $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $y=\dfrac{1}{3}\operatorname{costg}\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin^2 10x}{10\cos 20x}$;

в) $y=(x\sin x)^{\ln(x\sin x)}$; г) $y+x+\operatorname{arctg}3x+\arcsin 2y=0$.

21. а) $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$; б) $y=8\sin\operatorname{ctg}3+\dfrac{1}{5}\dfrac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$;

в) $y=(x^3+4)^{\operatorname{tg}x}$; г) $xy=\ln(e^x+e^y)$.

22. а) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$; б) $y=\dfrac{\operatorname{cosctg}3\cos^2 14x}{28\sin 28x}$;

в) $y=x^{\sin^3 x}$; г) $\cos(x-y)-2x+4y=0$.

23. а) $y=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$; б) $y=\dfrac{\cos\operatorname{tg}(\frac{1}{3})\sin^2 15x}{15\cos 30x}$;

в) $y=(x^2-1)^{\operatorname{tg}x}$; г) $y=\cos(x+y)$.

24. а) $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$; б) $y=\dfrac{\sin\operatorname{tg}\left(\frac{1}{7}\right)\cos^2 16x}{32\sin 32x}$;

в) $y=(x^4+5)^{\operatorname{ctg}x}$; г) $xe^y+ye^x=xy$.

25. а) $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$; б) $y=\dfrac{\operatorname{ctg}\sin\left(\frac{1}{3}\right)\sin 17x}{17\cos 34x}$;

в) $y=(\sin x)^{\frac{5x}{2}}$; г) $\cos xy=\dfrac{y}{x}$.

26. а) $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\dfrac{1}{x}}$; б) $y=\dfrac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}2}\cos^2 18x}{36\sin 36x}$;

в) $y=(x^2+1)^{\cos x}$; г) $(x+2y)^2+(x-3y)^3=0$.

27. а) $y=\dfrac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$; б) $y=\dfrac{\operatorname{tg}\ln 2\sin^2 19x}{19\cos 38x}$;

в) $y=19^{x^{19}}x^{19}$; г) $y\ln x+x\ln y=\ln(xy)$.

28. а) $y=\dfrac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$; б) $y=\operatorname{ctg}\cos 5-\dfrac{\cos^2 20x}{40\sin 40x}$;

в) $y=x^{3x}2^x$; г) $(x+y)^2=(x-2y)^3$.

29. а) $y = 3\dfrac{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}{x + 1}$;   б) $y = \operatorname{ctg} \sin\dfrac{1}{13} - \dfrac{1}{48}\dfrac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$;

в) $y = x^{2x}5^x$;   г) $x - y^2 + \operatorname{ctg}\dfrac{x}{y} = 0$.

30. а) $y = 3\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)}{(x-1)^2}}$;   б) $y = \sin\ln\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$;

в) $y = x^{e^{\sin x}}$;   г) $y\sin x = \cos(xy)$.

Задача 9. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций:

1. а) $y = \dfrac{7x+1}{17(4x+3)}$;   б) $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

2. а) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$;   б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t^2+1}. \end{cases}$

3. а) $y = \log_3(x+5)$;   б) $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$

4. а) $y = \dfrac{x}{x+1}$;   б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2\cos t). \end{cases}$

5. а) $y = 2^{5x}$;   б) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$

6. а) $y = \dfrac{11+12x}{6x+5}$;   б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4\dfrac{t}{2}. \end{cases}$

7. а) $y = \sin(3x+1) + \cos 5x$;   б) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

8. а) $y = a^{2x+3}$;   б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln\sin t. \end{cases}$

9. а) $y = \dfrac{4}{x}$;   б) $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

10. а) $y = \dfrac{5x+1}{13(2x+3)}$;   б) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

11. а) $y = \operatorname{arctg}\left(x^2\right)$ б) $\begin{cases} y = \sin^3 t \\ x = 2t - \sin 2t \end{cases}$

12. а) $y = \dfrac{x-1}{x+1}e^{-x}$ б) $\begin{cases} y = t - \sin t \\ x = t + \cos t \end{cases}$

13. а) $y = xe^{-x^2}$ б) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$

14. а) $y = x \cdot \sqrt{1 + x^2}$ б) $\begin{cases} x = t - \ln \sin t \\ y = t + \ln \cos t \end{cases}$

15. а) $y = e^{-x} \cdot \sin x$ б) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}$

16. а) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$ б) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

17. а) $y = x^3 \ln x$ б) $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2} \\ y = t - \cos t \end{cases}$

18. а) $y = \ln \operatorname{ctg} 2x$ б) $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2} \\ y = t - \sin t \end{cases}$

19. а) $y = \ln \ln x$ б) $\begin{cases} x = 2\cos^3 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$

20. а) $y = xe^{-x}$ б) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

21.а) $y = a^{3x}$; б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \\ y = \dfrac{1}{1+t^2}. \end{cases}$

22. а) $y = \lg(5x + 2)$; б) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

23. а) $y = \dfrac{x}{2(3x+2)}$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$

24. а) $y = \lg(x+4)$ б) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sec t. \end{cases}$

25. а) $y = \dfrac{4}{x}$; б) $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

26. а) $y = \dfrac{x}{9(4x+9)}$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$

27. а) $y = \lg(1+x)$; б) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$

28. а) $y = 7^{5^x}$; б) $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \mathrm{tg}^2 t. \end{cases}$

29. а) $y = \lg(3x+1)$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

30. а) $y = \sqrt[5]{7x-1}$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$

Задача 10. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и построить ее график:

1. $y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$ $\quad y = \ln(25-9x^2)$

2. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ $\quad y = \dfrac{1}{xe^x}$

3. $y = \dfrac{x^3}{x^3-1}$ $\quad y = \ln\dfrac{x+1}{x+2}$

4. $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$ $\quad y = (e^{2x}-1)^{-1}$

5. $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ $\quad y = \dfrac{\ln x}{x}$

6. $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$ $\quad y = \dfrac{x}{\ln x}$

7. $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$ $\quad y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

8. $y = \dfrac{x^3}{x^2-9}$ $\quad y = x^2 \cdot e^x$

9. $y = \frac{1}{2}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ $\quad y = 6x^2 \cdot e^{-x^2}$

10. $y = \frac{x^2-1}{x^4}$ $\quad y = 2x^2 - \ln x$

11. $y = \left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2$ $\quad y = \ln(2x^2+3)$

12. $y = \frac{x}{(x-1)^2}$ $\quad y = \frac{e^x}{x}$

13. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ $\quad y = x^3 \cdot e^x$

14. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ $\quad y = x - \ln(x+1)$

15. $y = \frac{x^2+1}{x}$ $\quad y = \ln\frac{1+x}{1-x}$

16. $y = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad y = x \cdot e^{-x}$

17. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ $\quad y = e^{\frac{1}{x}}$

18. $y = \frac{x}{3-x^2}$ $\quad y = x \cdot \ln x$

19. $y = \frac{1}{1-x^2}$ $\quad y = \ln(x^2-4)$

20. $y = \frac{x}{x^2+1}$ $\quad y = \frac{1}{e^x-1}$

21. $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ $\quad y = e^{\frac{1}{x+2}}$

22. $y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$ $\quad y = x^2 \ln x$

23. $y = \frac{x^3-8}{2x^2}$ $\quad y = x^2 e^{-x}$

24. $y = \frac{4x}{4+x^2}$ $\quad y = \ln\frac{x}{x-1}$

25. $y = \frac{x^2-1}{x^4}$ $\quad y = 2x^2 - \ln x$

26. $y = \frac{x^2-4}{x^2-9}$ $\quad y = x + \ln(x^2-4)$

27. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$ $\qquad$ $y = \ln(1 + x^2)$

28. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ $\qquad$ $y = e^{\frac{1}{2-x}}$

29. $y = \dfrac{4x^3 + 5}{x}$ $\qquad$ $y = \ln \dfrac{x-1}{x-2}$

30. $y = \dfrac{1-2x}{x^2 - x - 2}$ $\qquad$ $y = xe^{2x-1}$

Задача 11. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция *u*.

1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; $\quad z = \sin^2(2x + 3y)$

2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; $\quad z = x \cdot e^{\frac{y}{x}}$

3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; $\quad z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x^2}$

4. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$; $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $z = \ln\left(x^2 + y^2 + 2x + 1\right)$

6. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $\quad z = \ln\left(x^2 + (y+1)^2\right)$

7. $a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $z = \sin^2(x - ay)$

8. $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $z = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

9. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y} = 0$; $\quad z = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

10. $a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $z = e^{-\cos(x + ay)}$

11. $9\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $z = e^{-(x+3y)} \cdot \sin(x + 3y)$

12. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - \dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 0$; $z = \ln\left(x + e^{-y}\right)$

13. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0;\ z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

14. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;\ z=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$

15. $(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial x};\quad z=\cos y+(y-x\cdot)\sin y$

16. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=\arcsin\sqrt{\dfrac{x-y}{x}}$

17. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=\sin^2 x+\sin^2 y$

18. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

19. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=9\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2};\quad z=\sin(x+3y)$

20. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=\dfrac{1}{2(x^2+y^2)}$

21. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=\sin^2(2x+3y)$

22. $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0;\quad z=\ln\left(x+e^{-y}\right)$

23. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=x\cdot\sin y$

24. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$

25. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\dfrac{\partial^{32} z}{\partial y\partial x\partial y};\quad z=x^3+xy^2-5xy^3+y^5$

26. $x\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y};\quad z=\dfrac{x}{y}$

27. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\right)$

28. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$

29. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=x^2y+y^3$

30. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; $\quad z = xy^2 + yx^2$

Задача 12. Найти производную и градиент скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению вектора $\bar{l}$.

1. $u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}$,
   $\mathbf{l} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$,
   $M(1, 1, 1)$

2. $u = x + \ln\left(z^2 + y^2\right)$,
   $\mathbf{l} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$,
   $M(2, 1, 1)$

3. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$,
   $\mathbf{l} = 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,
   $M(1, 5, -2)$

4. $u = y \ln\left(1 + x^2\right) - \operatorname{arctg} z$,
   $\mathbf{l} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,
   $M(0, 1, 1)$

5. $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z)$,
   $\mathbf{l} = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$,
   $M(-2, 1, -1)$

6. $u = \ln\left(3 - x^2\right) - xy^2 z$,
   $\mathbf{l} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,
   $M(1, 3, 2)$

7. $u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$,
   $\mathbf{l} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$,
   $M(\pi/2, 3\pi/2, 3)$

8. $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1)$,
   $\mathbf{l} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}$,
   $M(1, 1, 2)$

9. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$,
   $\mathbf{l} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$,
   $M(1, 1, 0)$

10. $u = \dfrac{\sqrt{x}}{y} - \dfrac{yz}{x + \sqrt{y}}$,
    $\mathbf{l} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$,
    $M(4, 1, -2)$

11. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$,
    $\mathbf{l} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$,
    $M(1, -3, 4)$

12. $u = 2\sqrt{x + y} + y \operatorname{arctg} z$,
    $\mathbf{l} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$,
    $M(3, 2, -1)$

13. $u = z^2 + 2\operatorname{arctrg}(x - y)$,
    $\mathbf{l} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,
    $M(1, 2, -1)$

14. $u = \ln\left(x^2 + y^2\right) + xyz$,
    $\mathbf{l} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$,
    $M(1, -1, 2)$

15. $u = xy - \dfrac{x}{z}$,
    $\mathbf{l} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$,
    $M(-4, 3, -1)$.

16. $u = \ln\left(x + \sqrt{y^2 + z^2}\right)$,
    $\mathbf{l} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$,
    $M(1, -3, 4)$.

17. $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$,
    $\mathbf{l} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$,
    $M(2, 1, 1)$.

18. $u = 4\ln\left(3 + x^2\right) - 8xyz$,
    $\mathbf{l} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,
    $M(1, 1, 1)$.

19. $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$,
    $\mathbf{l} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$,
    $M(2, 4, 11)$.

20. $u = -2\ln\left(x^2 - 5\right) - 4xyz$,
    $\mathbf{l} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$,
    $M(1, 1, 1)$.

21. $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$,
$M\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$.

22. $u = xz^2 - \sqrt{x^3y}$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$,
$M(2, 2, 4)$.

23. $u = x\sqrt{y} - yz^2$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$,
$M(2, 1, -1)$.

24. $u = 7\ln\left(\frac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz$,
$\mathbf{l} = 14\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$,
$M(1, 1, 1)$.

25. $u = -\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 8xyz$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,
$M(2, 2, -1)$.

26. $u = \ln\left(1 + x^2\right) - xy\sqrt{z}$,
$\mathbf{l} = 8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,
$M(1, -2, 4)$.

27. $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$,
$M(3, 4, 1)$.

28. $u = x\sqrt{y} - (z = y)\sqrt{x}$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,
$M(1, 1, -2)$.

29. $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$,
$M(1, 1, 0)$.

30. $u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}$,
$\mathbf{l} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,
$M(0, -3, 4)$.

Задача 13. По данным опыта найти формулу вида $y = ax + b$ методом наименьших квадратов.

1.

x	1	2	3	4	5
y	3,2	4,1	2,8	0,6	1,3

2.

x	1	2	3	4	5
y	3,5	4,6	3,2	1,4	1,5

3.

x	1	2	3	4	5
y	3,3	4,5	3,0	1,0	1,3

4.

x	1	2	3	4	5
y	3,9	4,6	3,5	1,4	1,9

5.

x	1	2	3	4	5
y	4,1	5,2	3,6	1,8	2,2

6.

x	1	2	3	4	5

y	3,0	3,8	2,6	0,8	0,6

7.

x	1	2	3	4	5
y	4,2	5,4	3,8	1,8	2,4

8.

x	1	2	3	4	5
y	4,2	5,1	3,8	2,0	2,6

9.

x	1	2	3	4	5
y	4,4	5,6	3,8	1,6	2,8

10.

x	1	2	3	4	5
y	4,6	5,4	4,2	2,4	3,0

11.

x	1	2	3	4	5
y	3,9	4,9	3,4	1,4	1,9

12.

x	1	2	3	4	5
y	4,7	5,7	4,4	2,4	2,9

13.

x	1	2	3	4	5
y	3,5	4,5	3,0	1,0	1,5

14.

x	1	2	3	4	5
y	5,7	6,7	5,2	3,2	3,7

15.

x	1	2	3	4	5
y	5,6	6,6	5,3	3,3	3,8

16.

x	1	2	3	4	5
y	4,6	5,6	4,1	2,1	2,6

17.

x	1	2	3	4	5
y	5,3	6,3	4,8	2,8	3,3

18.

x	1	2	3	4	5
y	4,1	5,1	3,6	1,6	2,1

19.

x	1	2	3	4	5
y	4,8	5,8	4,3	2,3	2,8

20.

x	1	2	3	4	5
y	2,3	3,3	1,8	0,8	1,3

21.

x	1	2	3	4	5
y	5,2	6,2	4,7	2,47	3,2

22.

x	1	2	3	4	5
y	3,7	4,7	3,2	1,2	1,7

23.

x	1	2	3	4	5
y	2,5	3,5	2,0	1,0	1,5

24.

x	1	2	3	4	5
y	5,5	6,5	5,0	3,0	3,5

25.

x	1	2	3	4	5
y	4,3	5,3	3,8	1,8	2,3

26.

x	1	2	3	4	5
y	2,7	3,7	2,2	1,2	1,7

27.

x	1	2	3	4	5
y	4,67	5,7	4,2	2,2	2,7

28.

x	1	2	3	4	5
y	5,1	6,1	4,6	2,6	3,1

29.

x	1	2	3	4	5
y	5,4	6,4	4,9	2,9	3,4

30.

x	1	2	3	4	5
y	4,5	5,5	4,0	2,0	2,5

Задача 14. Найти решения уравнений в комплексной области

1. $z^2 - 4z + 20 = 0$
2. $z^2 - z + 5 = 0$
3. $z^2 + 8z + 41 = 0$
4. $z^2 + 3z + 4 = 0$
5. $z^2 + 2z + 5 = 0$
6. $z^2 - 5z + 7 = 0$
7. $z^2 - 6z + 10 = 0$
8. $z^2 - 7z + 13 = 0$
9. $z^2 - 2z + 7 = 0$
10. $z^2 + 4z + 5 = 0$

11. $z^2-10z+26=0$
12. $z^2+z+2=0$
13. $z^2-3z+5=0$
14. $z^2+2z+6=0$
15. $z^2+5z+8=0$
16. $z^2+6z+11=0$
17. $z^2-4z+6=0$
18. $z^2+10z+30=0$
19. $z^2+12z+38=0$
20. $z^2-3z+3=0$
21. $z^2-11z+40=0$
22. $z^2-3z+1=0$
23. $z^2-5z+9=0$
24. $z^2-6z+12=0$
25. $z^2+20z+105=0$
26. $z^2-20z+110=0$
27. $z^2-8z+41=0$
28. $z^2+6z+10=0$
29. $z^2-5z+9=0$
30. $z^2-2z+5=0$

Задача 15. Даны комплексные числа z_1, z_2, z_3.

1). Найти модуль и аргумент комплексных чисел z_1, z_2, z_3 и изобразить их на чертеже.

2). Записать комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической форме и выполнить следующие действия: $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^3, $\sqrt[4]{z_2}$.

3). Записать комплексные числа z_1 и z_2 в показательной форме и выполнить следующие действия: $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_2}{z_1}$, z_2^5, $\sqrt[4]{z_1}$.

4). Записать комплексное число z_3 в арифметической форме и выполнить следующие действия: z_1+2z_3; z_2-2z_3; $z_1 \cdot z_3$; $\dfrac{z_2}{z_3}$.

1. $z_1=1+i, z_2=1-\sqrt{3}i, \quad z_3=-3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2. $z_1=1-i, z_2=-1+\sqrt{3}i, \quad z_3=2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

3. $z_1=-2+2i, z_2=-\sqrt{3}-\sqrt{3}i, \quad z_3=-\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

4. $z_1=-2+2i, z_2=-\sqrt{3}-\sqrt{3}i, \quad z_3=-\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

5. $z_1=\sqrt{7}+\sqrt{21}i, z_2=4-4i, \quad z_3=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

6. $z_1=-\sqrt{2}-\sqrt{6}i, z_2=\sqrt{2}+\sqrt{6}i, \quad z_3=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+i\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

7. $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{6}i, z_2=-\sqrt{6}+\sqrt{2}i, \quad z_3=-5\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

8. $z_1=-\sqrt{2}+\sqrt{7}i, z_2=\sqrt{7}-\sqrt{7}i, \quad z_3=-\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

9. $z_1=2+2\sqrt{3}i, z_2=3-3i, \quad z_3=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

10. $z_1=-3-3i, z_2=2\sqrt{3}-2i, \quad z_3=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

11. $z_1=-1+i, z_2=\sqrt{3}-i, \quad z_3=-\sqrt{3}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

12. $z_1=1+i, z_2=-3\sqrt{3}+3i, \quad z_3=-\sqrt{3}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

13. $z_1=-2-2i, z_2=1+\sqrt{3}i, \quad z_3=\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-i\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

14. $z_1=\sqrt{3}+i, z_2=5-5i, \quad z_3=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

15. $z_1=2\sqrt{2}+2\sqrt{6}i, z_2=-10-10i, z_3=-2\left(\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$

16. $z_1=\sqrt{10}+\sqrt{30}i, z_2=7-7i, \; z_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{2}-i\sin\frac{5\pi}{2}\right)$

17. $z_1=-7-7i, \; z_2=\sqrt{10}-\sqrt{30}i, \; z_3=-(\cos 9\pi+i\sin(-9\pi))$

18. $z_1=\sqrt{7}-\sqrt{21}i, z_2=3+3i, \; z_3=-7\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

19. $z_1=-\sqrt{10}+\sqrt{30}i, z_2=9+9i, \; z_3=7\left(\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{5\pi}{3}\right)+i\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

20. $z_1=-\sqrt{5}+\sqrt{5}i, \; z_2=-\sqrt{10}-\sqrt{30}i, \; z_3=-2(\sin 4\pi+i\cos 4\pi)$

21. $z_1=-\sqrt{7}+\sqrt{21}i, z_2=-7+7i, \; z_3=4\left(\cos\frac{7\pi}{2}+i\sin\frac{7\pi}{2}\right)$

22. $z_1=-\sqrt{7}-\sqrt{21}i, z_2=\sqrt{13}+\sqrt{13}i, \; z_3=-4\left(\cos\frac{7\pi}{2}-i\sin\frac{7\pi}{2}\right)$

23. $z_1=7+7i, z_2=\sqrt{21}+\sqrt{7}i, \; z_3=\cos\frac{10\pi}{4}+i\sin\frac{10\pi}{4}$

24. $z_1=-\sqrt{21}-\sqrt{7}i, z_2=\sqrt{10}-\sqrt{30}i, \; z_3=\cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right)+i\sin\frac{10\pi}{4}$

25. $z_1=-3+3i,\ z_2=-\sqrt{21}-\sqrt{7}i,\ z_3=\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+i\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

26. $z_1=-7-7i,\ z_2=-\sqrt{21}-\sqrt{7}i,\ z_3=-4\left(\cos\frac{7\pi}{2}-i\sin\frac{7\pi}{2}\right)$

27. $z_1=1-\sqrt{3}i,\ z_2=1+i,\quad z_3=-3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

28. $z_1=\sqrt{7}-\sqrt{7}i, z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{7}i,\quad z_3=-\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

29. $z_1=1-\sqrt{3}i, z_2=1+i,\quad z_3=-3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

30. $z_1=2\sqrt{3}-2i, z_2=-3-3i,\quad z_3=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Задача 16. Найти неопределенные интегралы:

1. а) $\int\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$ б) $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$

в) $\int\frac{8x+18}{(x^2+5)(x-3)}dx$ г) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

2. а) $\int x^5(1-x^6)^7dx$ б) $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$

в) $\int(3x-2)e^{-2x}dx$ г) $\int\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}dx$

3. а) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{2+x^4}}$ б) $\int\mathrm{tg}^3 xdx$

в) $\int x^2\sin 2xdx$ г) $\int\frac{4x-2}{x^4+2x^2}dx$

4. а) $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ б) $\int\sin 7x\cos xdx$

в) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}$ г) $\int\frac{x^2+x-1}{(3x-2)(2x-1)^2}dx$

5. а) $\int\frac{x\sqrt{2}}{(1+2x^2)^3}dx$ б) $\int\mathrm{ctg}^3 2xdx$

в) $\int(2x+1)\cos xdx$ г) $\int\frac{6dx}{x^3-9x}$

6. а) $\int \frac{\sin x}{1+5\cos x}dx$ б) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

в) $\int \frac{x^4dx}{1-x^{10}}$ г) $\int \frac{3x^2+5x+6}{(x^2+6)(x^2+4x+16)}$

7. а) $\int \frac{xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int \sin^2 3x\cos^3 2xdx$

в) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$ г) $\int \frac{(6x-17)dx}{(x-4)(x^2+x-6)}$

8. а) $\int 12^{\sin x}\cos xdx$ б) $\int \sin^5 4xdx$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$ г) $\int \frac{x^2dx}{(x+1)^3}$

9. а) $\int \frac{3^{\ln x}}{x}dx$ б) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}dx$

в) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$ г) $\int \frac{(2x+10)dx}{(x^2+5)(x^2+2x+5)}$

10. а) $\int \frac{\sin\ln x+3}{x}dx$ б) $\int \sqrt{1+5\cos^2 x}\sin 2xdx$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt{x}}$ г) $\int \frac{x^3+2x^2-x+\frac{1}{2}}{(x+2)^2(x^2+1)}dx$

11. а) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ б) $\int x^4\cos(x^5+1)dx$

в) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$ г) $\int \frac{(x^2+12x+14)dx}{(x+1)^2(x+4)}$

12. а) $\int 8^x\cdot 16^{\frac{x}{2}}dx$ б) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt[7]{\sin^3 x}}$

в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+4}$ г) $\int \frac{10dx}{(x^2-1)(x^2+9)}$

13. а) $\int \frac{1-x}{1+x^2}dx$ б) $\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx$

в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+9}}$ г) $\int \frac{(4x+29)dx}{(2x-3)(x^2+x+5)}$

14. а) $\int x\cdot 4^{2x^2+7}dx$ б) $\int \frac{\sin x\cos xdx}{\sqrt{3-\sin^4 x}}$

в) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

г) $\int \frac{2x^2+7x+2}{x^3-8}dx$

15. а) $\int \frac{\sqrt[x]{e}}{x^2}dx$

б) $\int \sin\frac{4x}{5}\cos\frac{x}{5}dx$

в) $\int \frac{(\sqrt{x}-2)dx}{x(\sqrt[3]{x}+1)}$

г) $\int \frac{3x^2-4x+10}{(2x+1)(x^2+4)}dx$

16. а) $\int \frac{(e^{\arcsin x}-1)dx}{\sqrt{1-x^2}}$

б) $\int \sin^3 x\sqrt[3]{\cos x}dx$

в) $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$

г) $\int \frac{(11x+25)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$

17. а) $\int \frac{xdx}{1+x^4}$

б) $\int \sin^3\frac{x}{4}\cos^5\frac{x}{4}dx$

в) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$

г) $\int \frac{-2xdx}{(x+1)(x^2+1)}$

18.а) $\int \frac{x^3dx}{x^8+5}$

б) $\int (\cos 5x\cos 4x)dx$

в) $\int \frac{dx}{(6+\sqrt[3]{x})^4\sqrt[3]{x^2}}$

г) $\int \frac{x^2-7{,}5x-2{,}5}{(x^2+x)(x-5)}dx$

19. а) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}+2}{x}dx$

б) $\int \cos^2 4xdx$

в) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+5}}$

г) $\int \frac{4-4x}{x^3+8}dx$

20. а) $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}dx$

б) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{9}{x}dx$

в) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$

г) $\int \frac{4x^2+3x+45}{x^3-3x^2+9x-27}dx$

21. а) $\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$

б) $\int \frac{\sin 4x}{1+\cos^2 2x}dx$

в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$

г) $\int \frac{(x^2+5x+7)dx}{(x-2)(x^2+x+1)}$

22. а) $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$

б) $\int \sin 3x\sin 7xdx$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}}$

г) $\int \frac{4xdx}{3x^4-3}$

23. а) $\int e^{x+x^2}(1+2x)\,dx$ б) $\int \sin^2 x \sin 3x dx$

в) $\int \frac{\left(8-\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}\,dx$ г) $\int \frac{dx}{8x^3(2x-1)}$

24. а) $\int \frac{e^{6x}}{3+e^{6x}}\,dx$ б) $\int \frac{\sqrt{2+\operatorname{tg}^3 x}\,\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$

в) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}$ г) $\int \frac{x^3+x^2-18x-17}{x^2-16}dx$

25. а) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x}$ б) $\int \sqrt{1+\cos^3 x}\cdot \sin 2x \cos x dx$

в) $\int \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt[3]{2x+3}+1}\,dx$ г) $\int \frac{x^3+2x^2-2x}{x^2+2x+1}\,dx$

26. а) $\int e^{2x^2+\ln x}dx$ б) $\int \frac{\sin 4x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$

в) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$ г) $\int \frac{4x+3}{\left(x^2+3\right)\left(2x^2-4x+3\right)}dx$

27. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2-5}}$ б) $\int \sin\frac{x}{4}\cdot\sin\frac{3x}{4}\,dx$

в) $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ г) $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$

28. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$ б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}dx$

в) $\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+8x+1}}\,dx$ г) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$

29. а) $\int 4^{\sin x}\cdot \cos x dx$ б) $\int (2x+3)\sin x dx$

в) $\int \frac{(2x-2)dx}{\sqrt{x^2-6x+11}}$ г) $\int \frac{(2x-3)dx}{\left(x^2-3x+2\right)(x-4)}$

30. а) $\int \frac{dx}{x(3-\ln x)}$ б) $\int \sin^{10} x\cdot\cos^3 x dx$

в) $\int \frac{(2x+9)dx}{\sqrt{x^2-8x+7}}$ г) $\int \frac{3x+1}{x^3-7x^2+12x}\,dx$

Задача 17. Вычислить определенные интегралы:

1. а) $\int\limits_0^3 \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 5x \right) dx$, б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx$, г) $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx$

2. а) $\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} - 2x \right) dx$, б) $\int\limits_2^9 \sqrt[3]{x - 1}\, dx$

в) $\int\limits_0^1 \ln(x + 1) dx$, г) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left(16 - x^2\right)^3}}$

3. а) $\int\limits_1^2 \left(x^4 - \frac{2}{x^3} + \frac{x^2}{3} - 1 \right) dx$, б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x dx$

в) $\int\limits_0^1 x \cdot e^{-x} dx$, г) $\int\limits_0^5 x^2 \cdot \sqrt{25 - x^2} dx$

4. а) $\int\limits_1^2 \left(x^3 + \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2} + 1 \right) dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

в) $\int\limits_0^{e-1} \ln(x + 1) dx$ г) $\int\limits_0^4 x^2 \cdot \sqrt{16 - x^2} dx$

5. а) $\int\limits_1^2 \left(3x^3 + \frac{2}{x^2} - 7x + 3 \right) dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\, x \, dx$

в) $\int\limits_0^1 x \cdot e^x \, dx$ г) $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx$

6. а) $\int\limits_1^2 \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + x^3 \right) dx$ б) $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$

в) $\int\limits_1^e x \cdot \ln x \, dx$ г) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x + 1}}$

7. а) $\int\limits_1^2 \left(x^2 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx$ б) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$

в) $\int_1^e \ln x\,dx$ г) $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$

8. а) $\int_1^3 \left(\frac{1}{x} - x^2 + \frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx$ б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$

в) $\int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x\,dx$ г) $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

9. а) $\int_0^1 \left(x^4 - \frac{x^5}{3} + 2x\right)dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cdot \cos 2x\,dx$ г) $\int_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$

10. а) $\int_2^3 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2\right)dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos x\,dx$ г) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$

11. а) $\int_1^3 \left(x^2 - \frac{5}{x^3} + 2x - 1\right)dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \cdot \sin x\,dx$

в) $\int_0^1 x \cdot e^{2x}\,dx$ г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3-2\cos x}$

12. а) $\int_1^2 \left(x^4 + \frac{2}{x^4} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$ б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$

в) $\int_0^1 (x+1) \cdot e^{-x}\,dx$ г) $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$

13. а) $\int_1^3 \left(\frac{1}{x^3} - x^3 + \sqrt{x}\right)dx$ б) $\int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos 2x\,dx$ г) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

14. а) $\int\limits_1^2 \left(x^2 - \frac{7}{x^4} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) dx$ б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x + x^3}$

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin x \, dx$ г) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$

15. а) $\int\limits_1^2 \left(1 - 3x + \frac{x^2}{7} - \frac{7}{x^2}\right) dx$ б) $\int^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x \, dx$ г) $\int\limits_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} \, dx$

16. а) $\int\limits_1^2 \left(3 - 2x - \frac{x^2}{5} + \frac{5}{x^2}\right) dx$ б) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 - (\ln x)^2}}$

в) $\int\limits_0^2 x \cdot 3^x \, dx$ г) $\int\limits_0^1 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}$

17. а) $\int\limits_1^2 \left(2 + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2} + x^3\right) dx$ б) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$

в) $\int\limits_1^2 x \cdot \ln\left(x^2 + 1\right) dx$ г) $\int\limits_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1 + x}}$

18. а) $\int\limits_1^2 \left(3 - \frac{5}{2x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - x^3\right) dx$ б) $\int\limits_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$

в) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - 1}$ г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} x^2 \cdot \sin 4x \, dx$

19. а) $\int\limits_1^2 \left(x^4 + \frac{4}{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} + 1\right) dx$ б) $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}$

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos x \, dx$ г) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + x} dx$

20. а) $\int\limits_1^2 \left(2 + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2} + x^3\right) dx$ б) $\int\limits_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}$

в) $\int\limits_0^1 x \cdot e^{-x} dx$ г) $\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4} dx$

21. а) $\int_1^2 \left(x^4 - \frac{1}{x^4} + 2x - 3\right) dx$ б) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^2}$

в) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$ г) $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$

22. а) $\int_1^2 \left(x^3 - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) dx$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

в) $\int_0^1 x \cdot e^{3x} \, dx$ г) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

23. а) $\int_1^2 \left(x^2 - \frac{3}{x^2} + 2x - 4\right) dx$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

в) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ г) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} x \cos 4x \, dx$

24. а) $\int_1^2 \left(x^5 - \frac{3}{x^5} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 7\right) dx$ б) $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$

в) $\int_1^e \ln^2 x \, dx$ г) $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx$

25. а) $\int_1^2 \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ б) $\int_4^9 \left(\sqrt{x}-1\right) dx$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (x+1) \cdot \sin 4x \, dx$ г) $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{4+x^2}$

26. а) $\int_1^2 \left(x^3 - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) dx$ б) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

в) $\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$ г) $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$

27. а) $\int_1^2 \left(3 - 2x - \frac{x^2}{5} + \frac{5}{x^2}\right) dx$ б) $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin x \, dx$ г) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$

28. а) $\int_1^2 \left(2 + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2} + x^3\right) dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx$

в) $\int_0^1 (x+1)\cdot e^{-x}\,dx$ г) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$

29. а) $\int_1^2 \left(x^4-\frac{1}{x^4}+2x-3\right)dx$ б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\cos 2x\,dx$ г) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

30. а) $\int_1^2 \left(x^2-\frac{7}{x^4}+\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)dx$ б) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^2}$

в) $\int_0^1 x\cdot \operatorname{arctg} x\,dx$ г) $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$

Задача 18. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

1. $\int_1^\infty \frac{x^2dx}{1+x^4}$
2. $\int_{-2}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$
3. $\int_0^\infty \frac{x^3dx}{9+x^4}$
4. $\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}dx$
5. $\int_3^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$
6. $\int_{e^2}^\infty \frac{dx}{x\ln^3 x}$
7. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-6x+10}$
8. $\int_4^\infty \frac{dx}{x\ln^2\sqrt{x}}$
9. $\int_0^\infty x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx$
10. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$
11. $\int_1^\infty \frac{dx}{(2x-1)^3}$
12. $\int_2^\infty \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$
13. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+5}$
14. $\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^3}$
15. $\int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$
16. $\int_{-1}^\infty \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$
17. $\int_1^\infty x\cdot e^{-x}dx$
18. $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

19. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(x^3+1\right)^3}}$

20. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$

21. $\int\limits_{\sqrt{5}}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^5}}$

22. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$

23. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$

24. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4x^2+4x+3}$

25. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{25x^2-10x+2}$

26. $\int\limits_{100}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\lg^3 x}}$

27. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$

28. $\int\limits_{a}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

29. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\text{arctg}x}{1+x^2}dx$

30. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2-1}$

Задача 19. Изменить порядок интегрирования.

1. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{2-x} f(x,y)dy$

2. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-x^2}^{x^2} f(x,y)dy$

3. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)dy$

4. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$

5. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x}} f(x,y)dy$

6. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$

7. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x+1}^{4-x^2} f(x,y)dy$

8. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{1}{4}x^2}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$

9. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\frac{x}{2}+1}^{7-x} f(x,y)dy$

10. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x,y)dy$

11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$

12. $\int\limits_{0}^{\frac{3}{2}} dy \int\limits_{2y^2}^{y+3} f(x,y)dx$

13. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{2x^2}^{x+3} f(x,y)dy$

14. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y^2}^{3-y} f(x,y)dx$

15. $\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{0} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$

16. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\frac{5}{4}y}^{\sqrt{9+y^2}} f(x,y)dx$

17. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\frac{3}{4}x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$

18. $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{9+y^2}}^{\frac{5}{4}y} f(x,y)dx$

19. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1}^{x^2+1} f(x,y)dy$

20. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\frac{3}{4}y}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx$

21. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\frac{x}{2}+1}^{7-x} f(x,y)dy$

22. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\frac{5}{4}y}^{\sqrt{9+y^2}} f(x,y)dx$

23. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$

24. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$

25. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x+1}^{4-x^2} f(x,y)dy$

26. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{1}{4}x^2}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$

27. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{\frac{1}{3}x^2}^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$

28. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$

29. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$

30. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$

Задача 20. Вычислить площадь плоской пластинки, ограниченной данными линиями:

1. а) $y = \dfrac{3}{x},\ y = 4e^x,\ y = 3,\ y = 4.$ б) $y^2 - 2y + x^2 = 0,$

 в) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2\left(x^4 + y^4\right)\ (a > 0).$ $y^2 - 4y + x^2 = 0,$

 $y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}\,x.$

2. а) $x = \sqrt{36 - y^2},\quad x = 6 - \sqrt{36 - y^2}\,.$ б) $x^2 - 4x + y^2 = 0,$

 в) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(3x^2 + 2y^2\right)\ (a > 0).$ $x^2 - 8x + y^2 = 0,$

 $y = 0,\ y = x/\sqrt{3}\,.$

3. а) $x^2 + y^2 = 72,\ 6y = -x^2\ (y \le 0).$ б) $y^2 - 6y + x^2 = 0,$

 в) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2x^2\left(4x^2 + 3y^2\right)\ (a > 0).$ $y^2 - 8x + x^2 = 0,$

$y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}\,x$.

4. а) $x = 8 - y^2,\ x = -2y$.

   б) $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
   $x^2 - 4x + y^2 = 0,$
   $y = 0,\ y = x$.

   в) $(x^2 + y^2)^2 = 4ay^3\ (a > 0)$.

5. а) $y = \dfrac{3}{x},\ y = 8e^x,\ y = 3,\ y = 8$.

   б) $y^2 - 8y + x^2 = 0,$
   $y^2 - 10y + x^2 = 0,$
   $y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}\,x$.

   в) $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^4\ (a > 0)$.

6. а) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2},\ y = \dfrac{1}{2x},\ x = 16$.

   б) $y^2 - 4y + x^2 = 0,$
   $y^2 - 6y + x^2 = 0,$
   $y = x,\ x = 0$.

   в) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(4x^2 + y^2)(a > 0)$.

7. а) $x = 5 - y^2,\ x = -4y$.

   б) $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
   $x^2 - 10x + y^2 = 0,$
   $y = 0,\ x = \sqrt{3}x$.

   в) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(4x^2 + y^2)(a > 0)$.

8. а) $x^2 + y^2 = 12,\ -\sqrt{6y} = x^2\ (y \le 0)$.

   б) $y^2 - 6x + x^2 = 0,$
   $y^2 - 10y + x^2 = 0,$

   в) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(4x^2 + 5y^2)(a > 0)$.

9. а) $\sqrt{12 - x^2},\ y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2},$
   $x = 0 \quad (x \ge 0)$

   б) $x^2 - 4x + y^2 = 0,$
   $x^2 - 8x + y^2 = 0,$

10. а) $y = \dfrac{3}{2}\sqrt{x},\ y = \dfrac{3}{2x},\ x = 9$.

   б) $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
   $x^2 - 4x + y^2 = 0,$
   $y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}\,x$.

   в) $x^4 = a^2(x^2 - 3y^2) \quad (a > 0)$

11. а) $y = \sqrt{24 - x^2},\ 2\sqrt{3}y = x^2,\ x = 0$.
   $(x \ge 0)$.

   б) $y^2 - 2y + x^2 = 0,$
   $y^2 - 4y + x^2 = 0,$
   $y = \sqrt{3}x, \quad x = 0$.

   в) $(x^2 + y^2)^5 = a^6xy^3 \quad (a > 0)$

12. а) $y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ x = 0,\ (x \ge 0)$.

   б) $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
   $x^2 - 6x + y^2 = 0,$
   $y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}x$.

   в) $(x^2 + y^2)^5 = a^4x^4y^2 \quad (a > 0)$

13. а) $y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ x = 0,\ (x \ge 0)$.

   б) $y^2 - 4y + x^2 = 0,$

в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^4x^2 \quad (a>0)$

$y^2-6y+x^2=0$,
$y=\sqrt{3}x,\ y=0$.

14. а) $y=\sqrt{18-x^2},\ \ y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}$.
б) $x^2-4x+y^2=0$,
$x^2-8x+y^2=0$,
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x$.
в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^4y^2 \quad (a>0)$.

15. а) $y=32-x^2,\ \ y=-4x$.
б) $y^2-2y+x^2=0$,
$y^2-6y+x^2=0$,
$y=x/\sqrt{3},\ y=0$.
в) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(2x^2+y^2\right) \quad (a>0)$.

16. а) $y=2/x,\ \ y=5e^x,\ \ y=2,\ y=5$.
б) $x^2-2x+y^2=0$,
$x^2-4x+y^2=0$,
$y=0,\ \ y=x/\sqrt{3}$.
в) $\left(x^2+y^2\right)^7=a^8x^4y^2 \quad (a>0)$.

17. а) $x^2+y^2=36,\ 3\sqrt{2}y=x^2 \quad (y\ge 0)$.
б) $y^2-2y+x^2=0$,
$y^2-10y+x^2=0$,
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x$.
в) $\left(x^2+y^2\right)^5=a^6x^3y \quad (a>0)$.

18. а) $y=3\sqrt{x},\ y=3/x,\ x=4$.
б) $x^2-2x+y^2=0$,
$x^2-6x+y^2=0$,
$y=0,\ y=x/\sqrt{3}$.
в) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2+2y^2\right) \quad (a>0)$.

19. а) $y=6-\sqrt{36-x^2},\ y=\sqrt{36-x^2}$,
$x=0 \quad (x\ge 0)$.
б) $y^2-4y+x^2=0$,
$y^2-10y+x^2=0$,
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x$.
в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^3y \quad (a>0)$.

20. а) $y=25/4-x^2,\ \ y=x-5/2$
б) $x^2-2x+y^2=0$,
$x^2-6x+y^2=0$,
$y=0,\ y=x$.
в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^2y^2 \quad (a>0)$.

21. а) $y=\sqrt{x},\ \ y=1/x,\ \ x=16$.
б) $y^2-2y+x^2=0$,
$y^2-4y+x^2=0$,
$y=x,\ x=0$.
в) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(3x^2+2y^2\right) \quad (a>0)$.

22. а) $y=2/x,\ y=7e^x,\ y=2,\ \ y=7$.
б) $x^2-2x+y^2=0$,

в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^4y^2 \quad (a>0).$ $\quad x^2-4x+y^2=0,$
$y=0,\ y=\sqrt{3}x.$

23. а) $y=27-y^2,\ x=-6y.$ б) $y^2-6y+x^2=0,$
в) $3\left(x^2+y^2\right)^3=a^2\left(x^4+y^4\right) \quad (a>0).$ $\quad y^2-8y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0.$

24. а) $y=\sqrt{72-y^2},\ 6x=y^2,$ б) $x^2-4x+y^2=0,$
$y=0\ \ (y\geq 0).$ $\quad x^2-8x+y^2=0,$
в) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(4x^2+5y^2\right) \quad (a>0).$ $\quad y=0,\ y=\sqrt{3}x.$

25. а) $y=\sqrt{6-x^2},\ y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}.$ б) $y^2-4y+x^2=0,$
в) $x^4=a^2\left(x^2-3y^2\right) \quad (a>0).$ $\quad y^2-8y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0.$

26. а) $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x},\ y=\dfrac{3}{2x},\ x=4.$ б) $x^2-4x+y^2=0,$
в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^4y^2 \quad (a>0).$ $\quad x^2-8x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

27. а) $y=\sin x,\ \ y=\cos x,\ \ x=0,\ (x\geq 0)$ б) $y^2-4y+x^2=0,$
в) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(4x^2+5y^2\right) \quad (a>0).$ $\quad y^2-8y+x^2=0,$
$y=\sqrt{3}x,\quad x=0.$

28. а) $y=\dfrac{1}{x},\ \ y=6e^x,\ \ y=1,\ y=6.$ б) $x^2-4x+y^2=0,$
в) $\left(x^2+y^2\right)^5=a^6xy^3 \quad (a>0).$ $\quad x^2-6x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3}x,\ y=\sqrt{3}x.$

29. а) $y=3\sqrt{x},\ y=3/x,\ x=4.$ б) $y^2-2y+x^2=0,$
в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^2\left(4x^2+3y^2\right)(a>0).$ $\quad y^2-10y+x^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=0.$

30. а) $y=11-x^2,\ y=-10x.$ б) $x^2-6x+y^2=0,$
в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2\left(x^4+y^4\right) \quad (a>0).$ $\quad x^2-10x+y^2=0,$

Задача 21. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

1. $z = \frac{1}{4}y^2,\ 2x - y = 0,\quad x + y = 9,\quad z = 0$

2. $z - 2 - x,\quad z = 0,\ y = 2\sqrt{x},\quad y = \frac{1}{4}x^2$

3. $z = y,\quad z = 0,\quad x = 0,\quad x = 4,\quad y = \sqrt{25 - x^2}$

4. $x^2 + y^2 = 4,\quad z = 0,\quad z = 4 - x - y$

5. $x^2 + y^2 = 4,\quad y + z = 2,\quad z = 0$

6. $y^2 - x^2 = z,\quad y = 4,\quad z = 0$

7. $z = 4\sqrt{y},\quad x + y = 4,\quad x = 0$

8. $z = x^2 + y^2,\quad x^2 + y^2 = 2y,\quad z = 0$

9. $x^2 + y^2 = 12 - 2z,\quad x^2 + y^2 = z$

10. $z = x^2 + y^2,\quad 2z - 4 = x^2 + y^2$

11. $z = 0,\ z = x,\quad y = 0,\quad y = 3,\quad x = \sqrt{9 - y^2},\quad x = \sqrt{25 - y^2}$

12. $z = 0,\ z = x,\quad y = 0,\quad x = \sqrt{9 - y^2},\quad x = \sqrt{25 - y^2}$

13. $z = 0,\quad z = \frac{1}{3}y^2,\quad 5x + 3y - 30 = 0,\quad 5x - 2y - 5 = 0$

14. $y = x^2,\quad y = 1,\quad x + y + z = 4,\quad z = 0$

15. $z = 9 - y^2,\quad 3x + 4y = 13\ (y \geq 0),\quad x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

16. $z = 0,\quad z = 1 - y,\quad y = x^2$

17. $z = 0,\quad z = 2 - x,\quad x = 1,\quad y^2 = x$

18. $x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad x + y = 1,\quad z = x^2 + 3y^2$

19. $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\quad x = 1,\quad x + y = 2,\quad z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$

20. $x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad y + z = 1,\quad x = y^2 + 1$

21. $z = 0,\quad z = y^2,\quad y = 2x,\quad x = 1$

22. $x = 1 - z_2,\ y = x,\quad y = -x$

23. $z^2 = 4 - y,\quad x^2 + y^2 = 4y$

24. $z = 0,\quad y = \sqrt{1 - z},\quad y = x^2$

25. $z = 0,\ z = x^2 + y^2,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad x + y = 1$

26. $z = 0,\quad z = y^2,\quad 2x + y = 2,\quad x = 0$

27. $z = 4\sqrt{y},\quad x + y = 4,\quad x = 0$

28. $x = 19\sqrt{2y}, \quad x = 4\sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad z + y = 2$

29. $x = 16\sqrt{2y}, \quad x = \sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad z + y = 2$

30. $x = 20\sqrt{2y}, \quad x = 5\sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad z + y = \frac{1}{2}$

Задача 22.

1. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостью $z = 2$.

2. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4 - z, \quad z = 0$.

3. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного частью эллипсоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ и плоскостью z=0.

4. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 9$.

5. Найти массу тела, ограниченного конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостью $z = 4$, если плотность равна аппликате в каждой точке $\gamma = z$.

6. Найти массу тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = 2,$ $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$, если плотность $\gamma = yz$.

7. Найти массу тела, ограниченного плоскостями $2x + 3y + 2z = 6,$ $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$, если плотность $\gamma = y$.

8. Найти массу пирамиды с вершинами $A(0,0,1),$ $B(1,0,0),$ $C(0,1,0), \quad D(0,0,0)$ плотностью $\gamma = (x + y + z)^{-3}$.

9. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного $x = y^2 + z^2$ и плоскостью $x = 2$.

10. Найти массу куба $0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a, \quad 0 \le z \le a$ плотностью $\gamma = x + y + z$.

11. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного $2y = yx^2 + z^2$ и плоскостью $y = 2$.

12. Найти статический момент M_{xoy} относительно плоскости *XOY* однородного тела, ограниченного конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостью $z = 2$.

13. Найти статический момент M_{xoy} относительно плоскости *XOY* однородного тела, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 = 4 - z,$ и плоскостью $z = 0$.

14. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 = 2pz$ и плоскостью $z = h$.

15. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = R^2$, $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 0$.

16. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостью $z = 0$.

17. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, если плотность $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$.

18. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$.

19. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностью $x = y^2 + z^2$ и плоскостью $x = 4$.

20. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $x^2 + 4y - 16 = 0$ и осью *OX*.

21 Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $x^2 = ay$ $(a > 0)$ и прямой $y = 2$.

22. Найти массу однородного тела, ограниченного конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостью $z = 0$.

23. Найти массу пирамиды с вершинами $A(0,0,2)$, $B(2,0,0)$, $C(0,2,0)$, $D(0,0,0)$ плотностью $\gamma = (x + y + z + 1)^{-2}$.

24. Найти массу куба $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3$, $0 \le z \le 3$ плотностью $\gamma = x + y + z$.

25. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностью $4x = y^2 + z^2$ и плоскостью $x = 1$.

26. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 = 2z$ и плоскостью $z = 1$.

27.Найти массу куба $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$ плотностью $\gamma = x + y + z$.

28. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$.

29. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностью $x = y^2 + z^2$ и плоскостью $x = 3$.

30. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 10x$, $x^2 = 10y$.

Задача 23. Вычислить криволинейные интегралы I рода

1. $\int\limits_C y^2 ds$, где C – арка циклоиды

$x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

2. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$, где C – окружность $x^2 + y^2 = 2x$.

3. $\int\limits_C \dfrac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где C – отрезок прямой, соединяющей точки $O(0, 0)$, $A(1, 2)$.

4. $\int\limits_C \left(x^2 + y^2\right) dS$, C – кривая $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

5. $\int\limits_C y^2 dS$, где C – арка циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

6. $\int\limits_C xy dS$ вдоль окружности $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$.

7. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\, dS$, где C – окружность $x^2 + y^2 = 6x$.

8. $\int\limits_C (y - x) dS$, где C – дуга параболы $y = x^3$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 8)$.

9. $\int\limits_C xy dS$, где C – дуга окружности $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

10. $\int\limits_C \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right) dS$ вдоль прямой, соединяющей точки $A(-1, 0)$ и $B(0, 1)$.

11. $\int\limits_C y^2 dS$, где C – арка циклоиды $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

12. $\int\limits_C \left(x^2 + y^2\right) dS$, где C – окружность $x^2 + y^2 = 4$.

13. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\, dS$, где C – окружность $x^2 + y^2 = 4x$.

14. $\int\limits_C \dfrac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ по отрезку прямой, соединяющей точки $A(0, -2)$ и точки $B(4, 0)$.

15. $\int\limits_C \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}}$ вдоль отрезка прямой, соединяющей точки $A(0, -2)$ и $B(8, 2)$.

16. $\int\limits_C \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}}$ по отрезку прямой, соединяющей точки $A(2, -1)$ и $B(6, 1)$.

17. $\int\limits_C y^2 dS$, где C – арка циклоиды $\left.\begin{matrix} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1-\cos t) \end{matrix}\right\}$, $0 \le t \le 2\pi$.

18. $\int\limits_C x^2 y dS$, где C – часть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащая в I четверти.

19. $\int\limits_C \left(x^2+y^2\right)^3 dS$ вдоль окружности $x^2+y^2=9$.

20. $\int\limits_C \left(x^2+y^2\right)^5 dS$, вдоль окружности $x^2+y^2=25$.

21. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}dS$, где C – окружность $x^2+y^2=8x$.

22. $\int\limits_C \left(x^2+y^2\right)^4 dS$, где C – окружность $x^2+y^2=16$.

23. $\int\limits_L xdS$, где L – часть параболы $y = \frac{3}{8}x^2$, расположенной на $0 \le x \le 4$.

24. $\int\limits_L \frac{dS}{x-y}$, где L – отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$, заключённой между точками $A(0, 2)$ и $B(4, 0)$.

25. $\int\limits_C (y-x)dS$, где C – дуга параболы $y = x^3$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 8)$.

26. $\int\limits_C y^2 dS$, где C – арка циклоиды $\begin{matrix} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{matrix}$, $0 \le t \le 2\pi$.

27. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}dS$, где C – окружность $x^2+y^2=2x$.

28. $\int\limits_C \left(x^2+y^2\right)dS$, где C – окружность $x^2+y^2=4$.

29. $\int\limits_L \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}}$ по отрезку прямой, соединяющей точки $A(0, -2)$ и $B(4, 0)$.

30. $\int\limits_C y^2 dS$, где C – арка циклоиды $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1-\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

Задача 24. Вычислить криволинейные интегралы II рода

1. $\int\limits_L \left(x^2 - y\right)dx - \left(x - y^2\right)dy$, L: дуга окружности $x = \cos t,\ y = \sin t$.

2. $\int\limits_L (x + y)dx - (x - y)dy$ вдоль ломаной $L=OAB$: $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(4, 5)$.

3. $\oint \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ вдоль границы треугольника ABC ($A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$), обходя его против часовой стрелки.

4. $\int\limits_L \left(x^2 - 2y\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$ вдоль дуги параболы L: $y = x^2$ от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$.

5. $\int\limits_L \left(x^2 y - 3x\right)dx + \left(y^2 x + 2y\right)dy$ вдоль верхней половины эллипса $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t,\quad 0 \le t \le \pi$.

6. $\int\limits_L \left(x^2 + y\right)dx - \left(y^2 + x\right)dy$ вдоль ломаной $L=ABC$: $A(1, 2)$, $B(1, 5)$, $C(3, 5)$.

7. $\int\limits_L ydx + \dfrac{x}{y}dy$, $L: y = e^{-x}$ от точки $A(0, 1)$ до точки $B(-1, e)$.

8. $\int\limits_L \dfrac{y^2 + 1}{y}dx - \dfrac{x}{y^2}dy$, L – прямая от точки $A(1, 2)$ до точки $B(2, 4)$.

9. $\int\limits_L \left(xy - x^2\right)dx - xdy$ вдоль дуги параболы L: $y = 2x^2$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 2)$.

10. $\int\limits_L \dfrac{y}{x}dx + xdy$ вдоль дуги $L: y = \ln x$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(e, 1)$.

11. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$ вдоль прямой $L: y = x$ от точки $A(0; 0)$ до точки $B(2, 2)$.

12. $\int\limits_L xdy - ydx$ вдоль циклоиды $L: x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ от точки $A(2\pi a, 0)$ до точки $B(0, 0)$.

13. $\int\limits_L (x + y)dx + (x - y)dy$ вдоль окружности $L: x = 4\cos t,\quad y = 4\sin t$, обходя ее против хода часовой стрелки.

14. $\int\limits_L \left(x^2 + y\right)dx + \left(y^2 + x\right)dy$ вдоль ломаной $L = ABC: A(1, 2),\ B(1, 5),\ C(3, 5)$.

15. $\int\limits_L xdy - ydx$ вдоль контура треугольника $L=ABC : A(-2,0),\ B(2,0),\ C(0,2)$, обходя его против часовой стрелки.

16. $\int\limits_L xe^{x^3}dy + ydx$ вдоль параболы $L : y = x^2$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.

17. $\int\limits_L 2xydx - x^2dy$ вдоль параболы $L : x = 2y^2$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(2, 1)$.

18. $\int\limits_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$ вдоль астроиды $L : x = 8\cos^3 t,\ y = 8\sin^3 t$ от точки $A(8, 0)$ до точки $B(0, 8)$.

19. $\int\limits_L \left(x^2 - y^2\right)dx + xydy$ вдоль прямой L, соединяющей точки $A(1, 1)$ и $B(3, 4)$.

20. $\int\limits_L (x - y)^2dx + (x + y)^2dy$

вдоль ломаной $L = ABC : A(0,0),\ B(2,0),\ C(4,2)$.

21. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$ вдоль прямой $L : y = -x$ от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(0, 0)$.

22. $\int\limits_{AB} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, где AB – верхняя часть окружности $x = R\cos t,\ y = R\sin t$.

23. $\int\limits_L (x + y)dx + (x - y)dy$ вдоль окружности $L : x = 4\cos t,\ \ y = 4\sin t$ от точки $A(4, 0)$ до точки $B(0, 4)$.

24. $\int\limits_L \left(x^2 + y\right)dx + \left(y^2 + x\right)dy$ вдоль прямой $L = AB$ от точки $A(1, 2)$ до точки $B(3, 5)$.

25. $\int\limits_L xdy - ydx$ вдоль контура треугольника $L = ABC : A(-2,0),\ B(3,0),\ C(0,4)$, обходя его против часовой стрелки.

26. $\int\limits_L xe^{x^{21}}dx + ydy$ вдоль гиперболы $L : y = x^3$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1,1)$.

27. $\int\limits_L 2xydx - x^2dy$ вдоль параболы $L : x = 2y^2$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(8, 2)$.

28. $\int\limits_{OAB} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$ вдоль ломаной *OAB*,

где *O*(0, 0), *A*(2, 0), *B*(4, 2).

29. $\int\limits_{AB} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки *A*(–1, 1) до точки *B*(1, 1).

30. $\int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$ вдоль линии $y = |x|$ от точки *A*(–1, 1) до точки *B*(2, 2).

Задача 25. Проверить, является ли выражение полным дифференциалом некоторой функции *U(x, y)*. В случае положительного ответа найти *U(x, y)*.

1. $\left(\dfrac{2x}{x^2+y} + y \cdot \cos xy\right)dx + \left(\dfrac{1}{x^2+y} + x \cdot \cos xy\right)dy$.

2. $\left(\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2y}} - \sin(x+y)\right)dx + \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^3+2y}} - \sin(x+y)\right)dy$.

3. $\left(3x^2 - 3y - 1\right)dx + (-3x - 8y)dy$.

4. $\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \dfrac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

5. $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2-y^2-2xy}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2-2xy}}$.

6. $\dfrac{dy}{y-x} - \dfrac{dx}{y-x}$.

7. $e^{3x^2+2y^2-xy} \cdot (6x-y)dx + e^{3x^2+2y^2-xy} \cdot (4y-x)dy$.

8. $\dfrac{2x}{x^2+y^2}dx + \dfrac{2y}{x^2+y^2}dy$.

9. $\dfrac{1}{x}\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}dy - \dfrac{y}{x^2}\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}dx$.

10. $y \cdot x^{y-1}dx + x^y \ln x dy$.

11. $2x \cdot \cos\left(x^2+y^2\right)dx + 2y \cdot \cos\left(x^2+y^2\right)dy$.

12. $\dfrac{2xdx}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \dfrac{2ydy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

13. $(y+\cos(x+y))dx+(x+\cos(x+y))dy$.

14. $(2x-2y)dx+(2y-2x)dx$.

15. $(x^2-2xy^2+3)dx+(y^2-2x^2y+3)dy$.

16. $(1-e^{x-y}+\cos x)dx+(e^{x-y}+\cos y)dy$.

17. $(x^3+2xy^2+4)dx+(y^3+2x^2y+4)dy$.

18. $(2x-3xy^2+2y)dx+(2x-3x^2y+2y)dy$.

19. $(x^4+3y+4)dx+(y^5+3x+5)dy$.

20. $\left(\dfrac{2x}{\cos^2(x^2+y)}+y\right)dx+\left(\dfrac{1}{\cos^2(x^2+y)}+x\right)dy$.

21. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y}}+ye^{xy}\right)dx+\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y}}+xe^{xy}\right)dy$.

22. $\left(x\cos(x^2+y)+\dfrac{y}{\sqrt{xy+5}}\right)dx+\left(\dfrac{1}{2}\cos(x^2+y)+\dfrac{x}{\sqrt{xy+5}}\right)dy$.

23. $(2xy+\cos(x+y^2))dx+(x^2+2y\cos(xy^2))dy$.

24. $(x^5+y\cos xy)dx+(y^2+x\cos xy)dy$.

25. $(1-e^{x-y}-\cos x)dx+(e^{x-y}+\cos y)dy$.

26. $(\sin x-e^{x+y})dx+(1-e^{x+y}+\sin y)dy$.

27. $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{2y-x}{y^2}\right)dy$

28. $\dfrac{x}{(x+y)^2}dx+\dfrac{2x+y}{(x+y)^2}dy$.

29. $\left(2xy^2+3x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2x}{y^2}\right)dx+\left(2x^2y+3y^2+\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{2x^2}{y^3}\right)dy$.

30. $(1-\sin 2x)dy-(3+2y\cos 2x)\,dx$

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРНОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Задача 1. Даны векторы $\bar{a}$ = (2, 1, 0); = (1, –1, 2); $\bar{c}$ = (2, 2, 1); $\bar{d}$ = (3, 7, -7) в некотором базисе. Показать, что векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют базис трехмерного пространства, и найти координаты вектора $\bar{x}$ в этом базисе.

Решение

Базис n-мерного линейного векторного пространства составляют ровно n линейно независимых векторов. Следовательно, надо показать, что векторы линейно независимы, то есть нулевая линейная комбинация этих векторов

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{0}$$

возможна только при нулевых коэффициентах $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Запишем матричное уравнение

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 1 \cdot \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 0 \cdot \alpha + 2\beta - \gamma = 0. \end{cases}$$

Вычислим определитель этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot 2 - \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (2-4) \cdot 2 - (-1-4) = -1.$$

Определитель $\Delta \neq 0$, следовательно, имеется единственное решение $\alpha = \beta = \gamma = 0.$, а векторы линейно независимы и образуют базис. Найдем координаты вектора $\bar{d} = (x_1, x_2, x_3)$ в базисе векторов . Координаты вектора – это коэффициенты при базисных векторах в его разложении по базису.

Тогда

$$\bar{d} = x_1 \cdot \bar{a} + x_2\bar{b} + x_3 \cdot \bar{c}$$

или

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ \qquad 2x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 2 \\ -7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(1-4) - 1(-7+14) + 2(14-7) = -9 - 7 + 14 = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-7+14) - 1(-3+14) = -14 - 11 = 3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(7-14) - 1(-7-6) = -14 + 13 = -1;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 1;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{-1} = -3;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Следовательно, в базисе $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ $\vec{d}$ = (1, -3, 1).

Задача 2. Дана система линейных уравнений

Доказать ее совместность и решить двумя способами:
1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

Решение

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -58 \neq 0.$$

Следовательно, система совместна.
1) Решение системы методом Гаусса

$$\sim\sim$$

$$\sim\sim$$

Откуда

Ответ: .
2) Решение системы средствами матричного исчисления.
Запишем систему в виде матричного уравнения, введя три матрицы:

Найдем обратную матрицу .
Определитель матрицы A:

Следовательно, матрица A невырожденная и обратная матрица существует:

,

где A^* – присоединенная матрица.
Запишем транспонированную матрицу

и каждый ее элемент заменим его алгебраическим дополнением.
Получим присоединенную матрицу:

Найдем матрицу X:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{58}\begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{58}\begin{pmatrix} -138 & -320 & -6 \\ -12 & -280 & +60 \\ -78 & -80 & +42 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{58}\begin{pmatrix} -464 \\ -232 \\ -116 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Откуда $x_1 = 8, x_2 = 4, x_3 = 2.$

Задача 3. Даны координаты вершин пирамиды A_1 (10, 6, 6); A_2 (–2, 8, 2); A_3(6, 8, 9); A_4 (7, 10, 3).

Найти: 1) длины ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4; 2) косинус угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) уравнения прямой A_1A_2;

5) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 6) уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 8) объем пирамиды (двумя способами). Сделать чертеж.

Решение

1) Имеем:

$$\overline{A_1A_2} = (-12, 2, -4); \ \overline{A_1A_3} = (-4, 2, 3); \ \overline{A_1A_4} = (-3, 4, -3),$$

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-12)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{144 + 4 + 16} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41},$$

$$\left|\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 4 + 9} = \sqrt{29},$$

$$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 16 + 9} = \sqrt{34}.$$

2) $\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}\right) = -12 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 + (-4) \cdot (-3) = 36 + 8 + 12 = 56$

Угол между α ребрами равен углу между векторами:

$$\alpha = \left\langle \overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4} \right\rangle.$$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}\right)}{\left|\overline{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overline{A_1A_4}\right|} \frac{56}{2\sqrt{41} \cdot \sqrt{34}} = \frac{28}{\sqrt{1394}} \approx 0{,}7499.$$

3) Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна площади треугольника, построенного на векторах и $\overline{A_1A_3}$:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]\right|.$$

Найдем векторное произведение $\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]$:

$$\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (6+8)\bar{i} - (-36-16)\bar{j} + (-24+8)\bar{k} = 14\bar{i} + 52\bar{j} - 16\bar{k} = (14, 52, -16).$$

Модуль векторного произведения:

$$\left|\left[\overline{A_1A_2}, A_1A_3\right]\right| = \sqrt{14^2 + 52^2 + (-16)^2} = \sqrt{196 + 2704 + 256} =$$

$$= \sqrt{3156} = 2\sqrt{789}.$$

Откуда искомая площадь:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{789} = \sqrt{789} \approx 28{,}089 \left(\text{ед.}^2\right).$$

4) Уравнения прямой A_1A_2 определяется как уравнения прямой, проходящей через две данные точки :

$$\frac{x-10}{-2-10} = \frac{y-6}{8-6} = \frac{z-6}{2-6},$$

$$\frac{x-10}{-12} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-6}{-4},$$

или

$$\frac{x-10}{-6} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-6}{-2},$$

5) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ запишем как уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

;

$$(x-10)(6+8) - (y-6)(-36-16) + (z-6)(-24+8) = 0;$$

Следовательно, искомое уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

–

6) Уравнения высоты из точки A_4 на грань $A_1A_2A_3$ определится как уравнения прямой, проходящей через точку A_4 перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$:

За направляющий вектор примем нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\overline{n} = (7{,}26{,}-8).$$

Тогда уравнения высоты запишутся в виде:

7) Угол β между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ – это угол между прямой и плоскостью, составляющий в сумме с углом между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости прямой угол.

Следовательно,

$$\sin\beta = \frac{(\overline{a},\overline{n})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{n}|}.$$

$$\overline{a} = \overline{A_1A_4} = (-3{,}4{,}-3),\ |\overline{a}| = \sqrt{34},$$

$$\overline{n} = (7{,}26{,}-8), |\overline{n}| = \sqrt{7^2 + 26^2 + (-8)^2} = \sqrt{49+676+64} = \sqrt{789};$$

$$(\overline{a},\overline{n}) = -3\cdot 7 + 4\cdot 26 + (-3)\cdot(-8) = -21 + 104 + 24 = 107.$$

Откуда

$$\sin\beta = \frac{107}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{789}} = \frac{107}{\sqrt{26826}} \approx 0{,}6533 \ \ (\beta \approx \arcsin 0{,}6533 \approx 39°20').$$

8) Объем пирамиды равен, с одной стороны, одной шестой модуля смешанного произведения векторов с другой стороны – одной третьей произведения площади S основания $A_1A_2A_3$ на высоту H, опущенную на основание из вершины A_4.

Так что:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(-12\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(-12\cdot(-18) - 2\cdot 21 - 4\cdot(-10)) = \frac{107}{3} = 35\frac{2}{3} \ \ (\text{ед.}^3)$$

Или $V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta A_1A_2A_3}\cdot H$.

Высоту H найдем как расстояние от точки A_4 (7, 10, 3) до плоскости $A_1A_2A_3$:

$$H=d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=$$

$$=\frac{7\cdot7+26\cdot10-8\cdot3-178}{\sqrt{7^2+26^2+(-8)^2}}=\frac{49+260-24-178}{\sqrt{789}}=\frac{107}{789},$$

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}\sqrt{789}\cdot\frac{107}{789}=\frac{107}{3}=35\frac{2}{3}\ \left(\text{ед}^3\right).$$

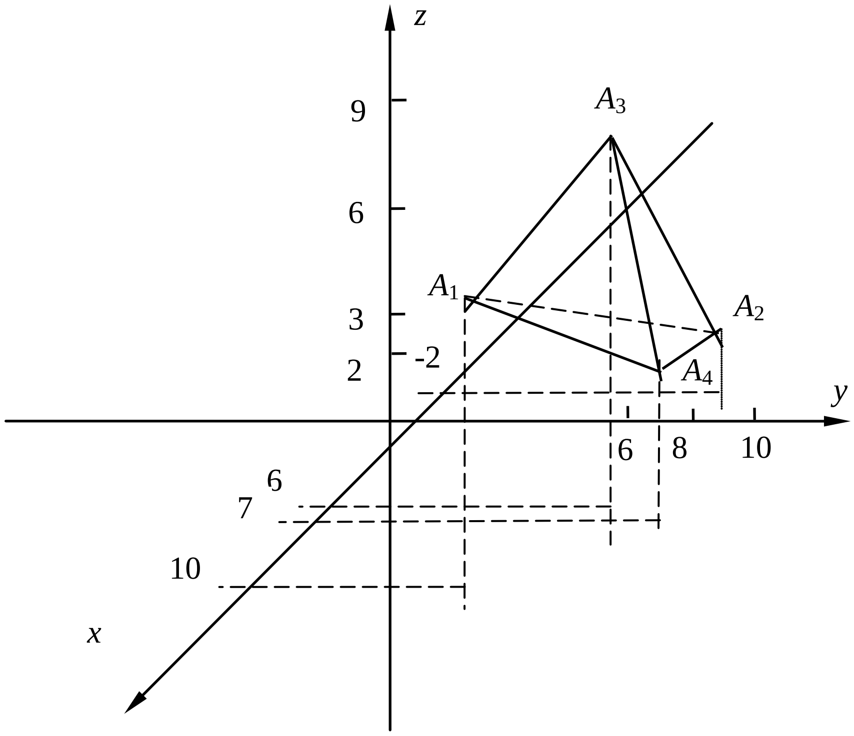


Рис.1 (к задаче № 3)

Задача 4. Установить вид кривых, заданных уравнениями. Привести уравнения кривых к каноническому виду и изобразить их на чертеже

а) $x^2-16y+48=0$; б) $x^2+y^2-4=0$;

в) $9x^2+4y^2-36=0$; г) $x^2+2y^2+1=0$;

д) $x^2-y^2+2y=0$; е) $x^2+y^2+2y+1=0$.

Р е ш е н и е

а) $x^2-16y+48=0\Rightarrow x^2=16(y-3)$ – парабола;

б) $x^2+y^2-4=0\Rightarrow x^2+y^2=4$ – окружность (1);

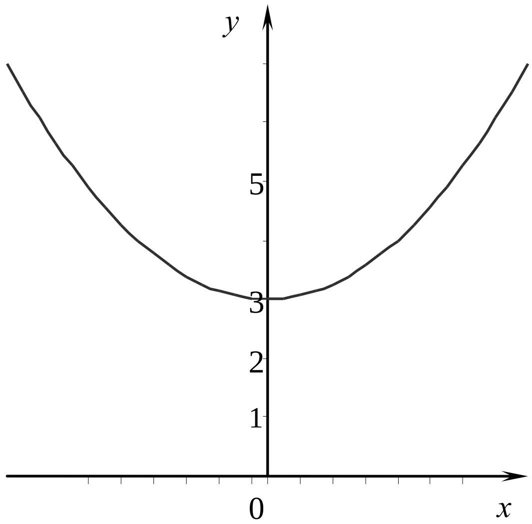
в) $9x^2+4y^2-36=0\Rightarrow 9x^2+4y^2=36\Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ – эллипс ;

г) $x^2+2y^2+1=0\Rightarrow x^2+2y^2=-1\Rightarrow \dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}}=-1$ – мнимый эллипс;

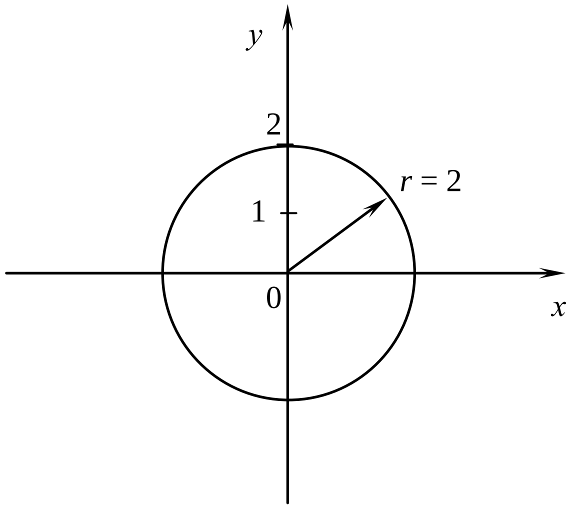
д) $x^2-y^2+2y=0\Rightarrow x^2-(y^2-2y+1)+1=0\Rightarrow (y-1)^2-x^2=1$ – гипербола;

е) $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 0$ – точка.

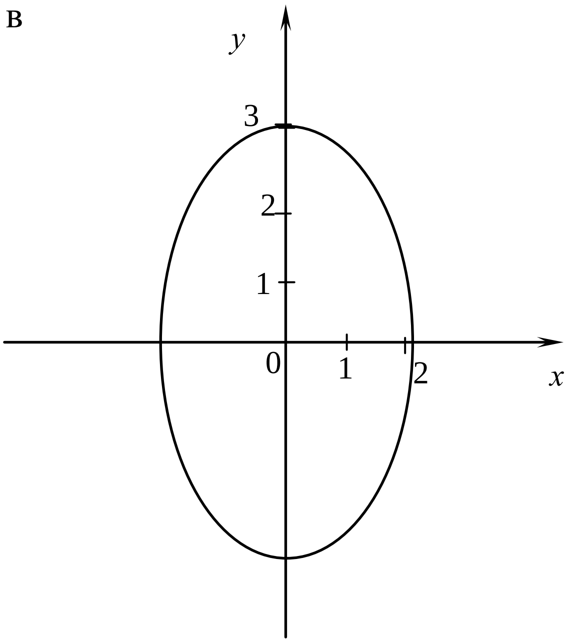
а



б



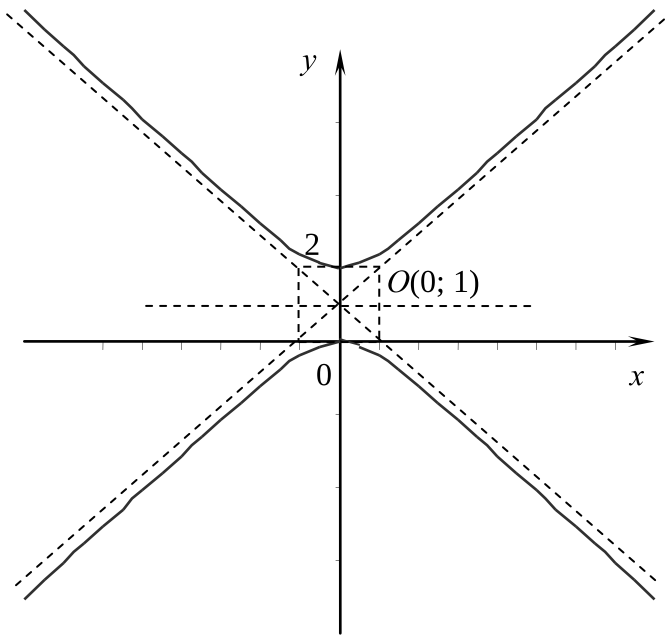
в



г

Мнимый эллипс

д



е

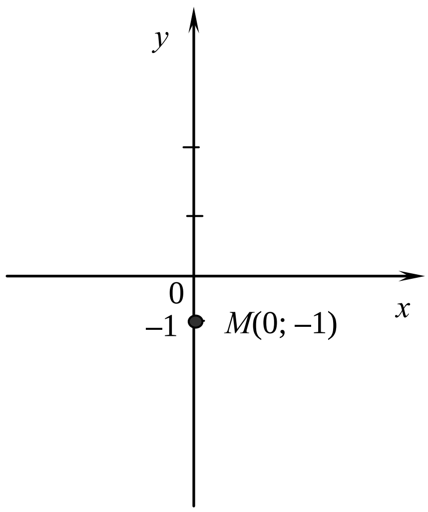


Рис. 2

Задача 5. Изобразить линию, заданную уравнением

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2ax^3 \quad (a>0).$$

Решение. Введем полярные координаты по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, будем иметь

$$\rho^4\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)^2=2a\rho^3\cos^3\varphi,$$

$$\rho^4=2a\rho^3\cos^3\varphi,$$

$$\rho=2a\cos^3\varphi,$$

так как $\rho>0$, то $\cos^3\varphi\rangle\,0$, т.е. $\cos\varphi\rangle\,0$, т.е. $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Функция $\cos\varphi$ – четная, поэтому построим ее график при $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, используя таблицу

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	$2a$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	a

и отобразим его относительно оси *x*. Получим линию, изображенную на рис. 3.

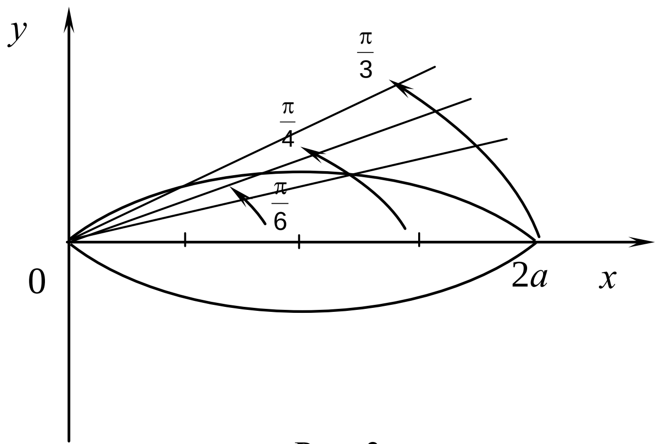


Рис. 3

Задача 5. Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^3+3x^2-1}{3x^3-3x+1}$.

Точка $x = 2$ принадлежит области определения функции.

Воспользуемся тем, что для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^3+3x^2-1}{3x^2-3x+1}=\frac{4\cdot 8+3\cdot 4-1}{3\cdot 4-3\cdot 2+1}=\frac{43}{7}.$$

2) Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-3x^2-2}{2x^6+4x+5}$.

В данном случае имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. В подобного рода примерах пользуются утверждением: многочлен при $x\to\infty$ эквивалентен своему старшему члену

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^6-3x^2-2}{2x^6+4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6}{2x^6}=\frac{1}{2}.$$

3) Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$.

При подстановке предельного значения аргумента получим неопределенность $\dfrac{0}{0}$, которая разрешается сокращением дроби на разность $x - 2$. Для чего квадратные трехчлены, стоящие в числителе и в знаменателе, разложим по формуле

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x-1}=$$

$$=\frac{2\cdot 2+1}{2-1}=5.$$

4) Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-9}$.

Предел находится аналогично предыдущему:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-10x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{3x-1}{x+3}=$$

$$=\frac{3\cdot 3-1}{3+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

5) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$.

Здесь также имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Чтобы ее раскрыть, умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю $\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)$. После этого можно сократить дробь на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{4+3x-(4-3x)}{7x\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{7x\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{7\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}=$$

$$=\frac{6}{7\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right)}=\frac{3}{14}.$$

6) Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$.

Неопределенность $\dfrac{0}{0}$ разрешается умножением числителя и знаменателя дроби на произведение выражений $\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)$, одно из которых сопряженное числителю, другое – знаменателю. После этого сократим дробь на двучлен $(x-4)$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-9\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{x}+2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2\cdot 4+1}+3}{\sqrt{4}+2}=\frac{3}{4}.$$

7) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin 2x}$.

Используем формулу $2\sin^2 x=1-\cos 2x$, а затем – эквивалентность величин $\sin 2x\sim 2x$ при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{x^2} = 4.$$

8) Найти $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin 5x\cdot\operatorname{ctg}^2 2x$.

Заменим эквивалентные величины $\sin 5x \sim 5x$ и $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin 5x\cdot\operatorname{ctg}^2 2x = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin 5x}{\operatorname{tg}^2 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{(2x)^2} = \frac{5}{4}.$$

9) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x}{x-2}}$.

Сделаем предварительно замену переменной. Обозначим $y = x-2$; $y \to 0$ при $x \to 2$. Тогда

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x}{x-2}} = \lim_{y\to 0}\left(3(y+2)-5\right)^{\frac{y+2}{y}} =$$

$$= \lim_{y\to 0}(3y+1)^{\frac{2}{y}+1} = e^{3\cdot 2} = e^6.$$

Приведем и другой способ вычисления. А именно, при вычислении пределов выражений вида u^v, где $u(x)\to 1$ и $v(x)\to\infty$ при данном предельном переходе, удобно пользоваться формулой $\lim u^v = e^{\lim v\ln u}$.

Так как в данном случае $u = 3x-5$ и $v = \dfrac{x}{x-2}\to\infty$ при $x\to 2$, то, пользуясь последней формулой, получим:

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-2}\cdot\ln(3x-5)} = e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{y+2}{y}\ln(3y+1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{y+2}{y}\cdot 3y} = e^{\lim\limits_{y\to 0}3(y+2)} = e^6.$$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)\left(\ln(x+5)-\ln(x+2)\right)$.

Запишем разность логарифмов как логарифм частного и, выделив целую часть дроби, заменим эквивалентные величины:

$$\ln(1+\alpha)\sim\alpha \text{ при } \alpha\to 0.$$

Откуда

$$\lim_{x\to\infty}(x+3)\left(\ln(x+5)-\ln(x+3)\right) = \lim_{x\to\infty}(x+3)\ln\frac{x+5}{x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}(x+3)\ln\left(1+\frac{2}{x+3}\right) = \lim_{x\to\infty}(x+3)\frac{2}{x+3} = 2.$$

Задача 6. Дана функция и два значения аргумента $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$. Требуется: 1)найти предел функции при приближении к каждому из заданных значений слева и справа; 2) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из заданных значений x; 3) сделать чертеж.

Решение

Функция в точке $x = 3$ неопределена. Найдем в этой точке левый и правый односторонние пределы.

В точке $x_1 = 3$ функция терпит бесконечный разрыв.

В точке $x_2 = 1$ функция непрерывна:

Сделаем схематический чертеж (рис.3).

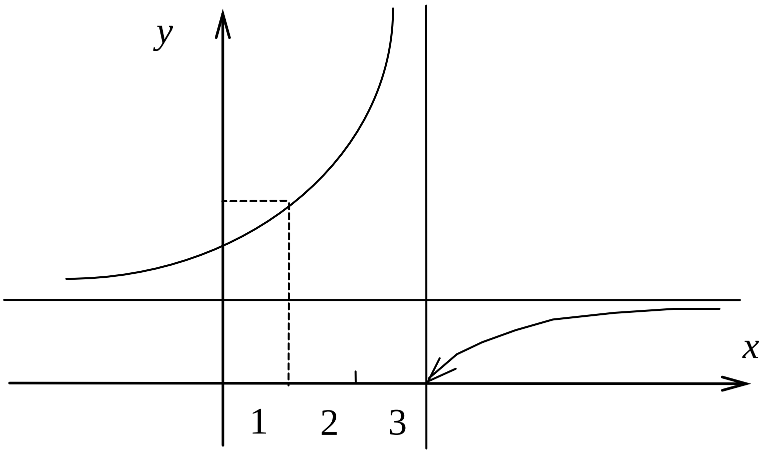


Рис.3

Задача 7. Функция задается различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной

Требуется:

1) найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) сделать схематический чертеж.

Решение

Данная функция определена при всех значениях x. Разрыв она может иметь в точках $x = -1$ и $x = 1$. Найдем односторонние пределы в этих точках.

;

.

Так как , то функция в точке $x = -1$ терпит конечный разрыв.

Скачок функции в этой точке равен

Найдем односторонние пределы функции в точке $x = 1$.

Так как , то функция в точке $x = 1$ непрерывна.

Сделаем схематический чертеж (рис.4).

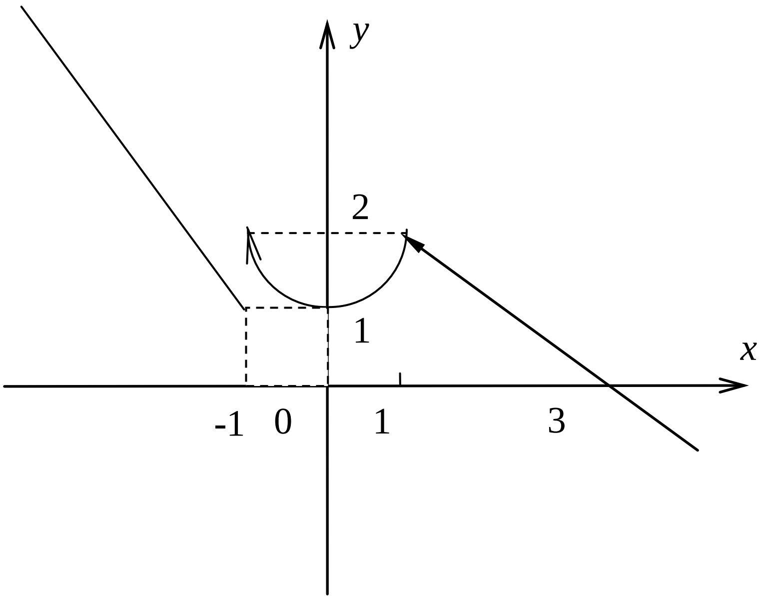


Рис.4

Задача 8. Найти производные данных функций:

а) $y = \dfrac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2 + 4x}}$; б)

в) г)

Решение

При решении указанных примеров используются следующие правила дифференцирования:

1)

2) x – независимая переменная.

3) , где

4)

5)
6)
7) Если , , то есть – сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то или Кроме этого используется таблица производных элементарных функций:
1) .
2) .
3) $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.
4) .
5) .
6) .
7) .
8) .
9) .
10) .
11) .
12) .
13)

а) $y = \dfrac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}}$

Воспользуемся правилом дифференцирования дроби:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2},\ V \neq 0$$

Для всех $2 + 4x > 0; \quad x > -\dfrac{1}{2}$ имеем:

$$y' = \frac{(4x-1)3\sqrt{2+4x} - (2x^2 - x - 1)3\dfrac{1}{2\sqrt{2+4x}}4}{9(2+4x)} =$$

$$= \frac{(4x-1)3(2+4x) - (2x^2 - x - 1)6}{9(2+4x)\sqrt{2+4x}} =$$

$$= \frac{3(16x^2 + 4x - 2 - 4x^2 + 2x + 2)}{9(2+4x)\sqrt{2+4x}} = \frac{9x(4x+2)}{9(2+4x)\sqrt{2+4x}} = \frac{x}{\sqrt{2+4x}}.$$

б)

$$y' = 2(x+5)\arccos^3 5x^4 + (x+5)^2 3\arccos^2 5x^4 \frac{-20x^3}{\sqrt{1-25x^8}} =$$

в) $y = (\sin 3x)^{\operatorname{arcctg} x}$.

Это показательно-степенная функция. Прологарифмируем ее:

$$\ln y = \operatorname{arcctg} x \ln(\sin 3x)$$

и затем продифференцируем обе части полученного равенства:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\ln(\sin 3x)}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arcctg} x \cos 3x \cdot 3}{\sin 3x} = -\frac{\ln(\sin 3x)}{1+x^2} + 3\operatorname{ctg} 3x \operatorname{arcctg} x.$$

Отсюда выразим :

$$y' = (\sin\ 3x)^{\operatorname{arcctg} x}\left(3\operatorname{ctg} 3x \operatorname{arcctg} x - \frac{3\ln(\sin\ 3x)}{1+x^2}\right).$$

г)

Это неявно заданная функция. Продифференцируем по x обе части уравнения:

$$2yy' = 1 + \frac{1}{y/x}\frac{y'x - y}{x^2};$$

.

Разрешим полученное равенство относительно производной :

$$y'\left(2xy^2 - x\right) = xy - y;$$

$$y' = \frac{xy - y}{2xy^2 - x}.$$

Задача 9. Найти вторые производные от функций:

а) $y = \dfrac{4x+7}{2x+3}$

$$y' = \frac{4(2x+3) - 2(4x+7)}{(2x+2)^2} = \frac{8x+12-8x-14}{(2x+2)^2} = -\frac{2}{(2x+3)^2};$$

$$y'' = \frac{2}{(2x+3)^4}2(2x+3)2 = \frac{8}{(2x+3)^3};$$

б)

$\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$ (параметрически заданная функция)

Здесь

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

$$y'_t = -\frac{1}{\cos^4 t} 2\cos t(-\sin t) = \frac{2\sin t}{\cos^3 t},$$

$$x'_t = 2\sin t \cos t,$$

$$y'_x = \frac{2\sin t}{\cos^3 t 2\sin t \cos t} = \frac{1}{\cos^4 t};$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

$$(y'_x)'_t = -\frac{1}{\cos^8 t}(4\cos^3 t(-\sin t)) = \frac{4\sin t}{\cos^5 t},$$

$$y''_{xx} = \frac{4\sin t}{\cos^5 t 2\sin t \cos t} = \frac{2}{\cos^6 t}.$$

Задача 10.

а) Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Решение

Исследуем функцию по следующей схеме:

1) Область определения. Точки разрыва. Вертикальные асимптоты.

Функция теряет смысл, если знаменатель обращается в нуль ($x^2 - 1 = 0$). Следовательно, $x = \pm 1$ – точки бесконечного разрыва.

$$\lim_{\substack{x \to -1-0 \\ x<-1}} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{\substack{x \to -1-0 \\ x+1<0}} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty;$$

$$\lim_{\substack{x \to -1+0 \\ x>-1}} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{\substack{x \to -1+0 \\ x+1>0}} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = +\infty;$$

$$\lim_{\substack{x \to 1-0 \\ x<1}} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{\substack{x \to 1-0 \\ x-1<0}} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty;$$

$$\lim_{\substack{x \to 1+0 \\ x>1}} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{\substack{x \to 1+0 \\ x-1>0}} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = +\infty;$$

Данная кривая имеет две вертикальные асимптоты: $x = –1$ и $x = 1$.

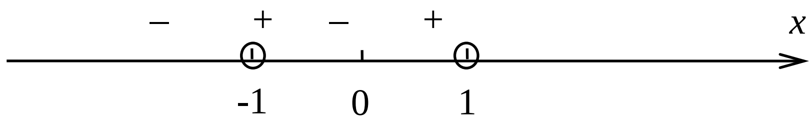
2) Корни функции. Интервалы знакопостоянства. Четность, нечетность.

Найдем точки, в которых функция обращается в нуль:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} = 0$$

при $x = 0$. Точка пересечения с осью абсцисс 0 (0, 0). Укажем интервалы знакопостоянства функции.

Знак $f(x)$



$$f(-x) = \frac{-x^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x).$$

Следовательно, функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат 0 (0, 0).

3) Интервалы возрастания, убывания. Экстремумы.

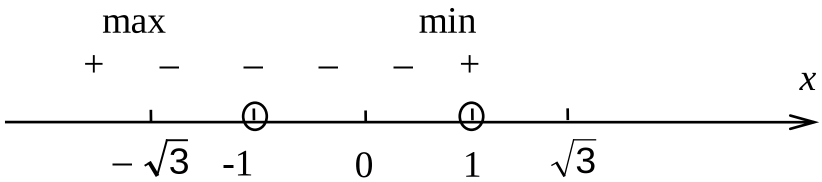
Найдем первую производную и приравняем ее к нулю:

$$f'(x) = \frac{3x^2\left(x^2 - 1\right) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{x^2\left(3x^2 - 3 - 2x^2\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{x^2\left(x^2 - 3\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2} = 0;$$

$x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$ – стационарные точки.

Определим вид экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.

Знак $f'(x)$



Вычислим функцию в точках экстремума

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{3 - 1} = -\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx -2{,}55, f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{3 - 1} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}55.$$

Точка $A\left(-\sqrt{3};\ -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ – точка максимума.

Точка B ($\sqrt{3}$; $\frac{3}{2}\sqrt{3}$) – точка минимума (рис.5).

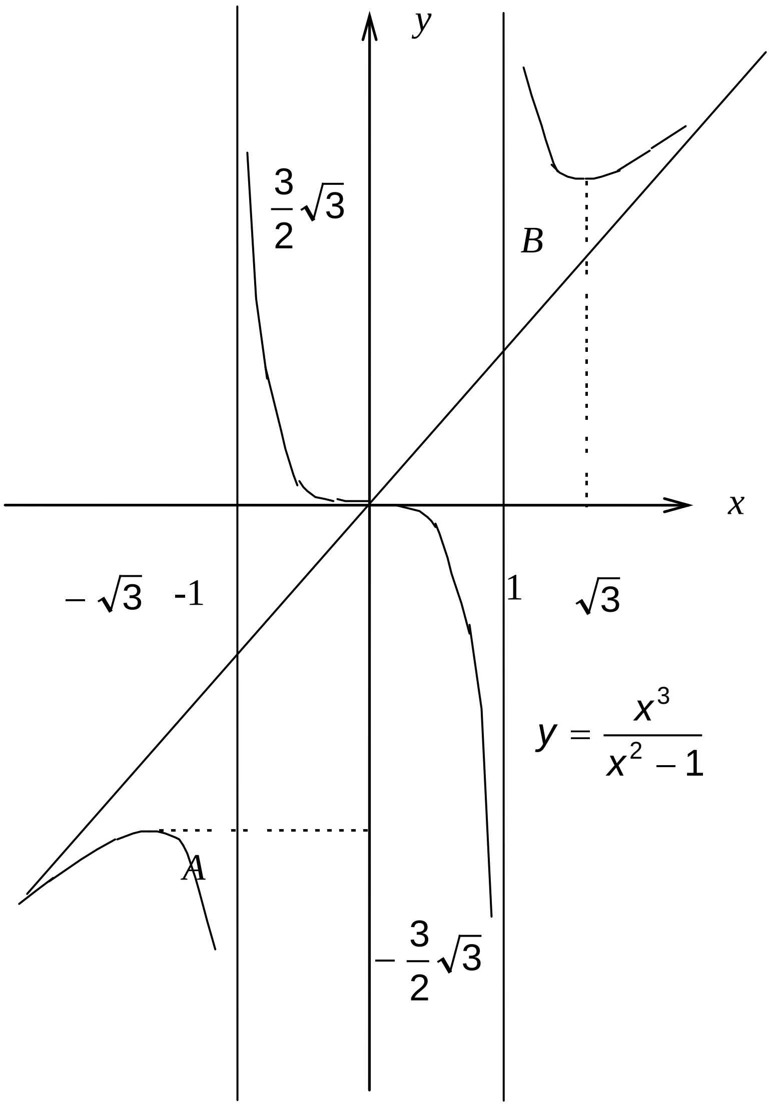


Рис.5

Функция возрастает на интервалах $(-\infty;\ -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3};\ \infty)$ и убывает на интервалах $\left(-\sqrt{3};\ -1\right)$, $\left(-1;\ 1\right)$ и $(1;\ \sqrt{3})$.

4) Интервалы выпуклости, вогнутости. Точки перегиба.

Найдем вторую производную и приравняем ее к нулю:

$$f''(x)=\left(\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\left(x^4-3x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(x^2-1\right)\left(\left(2x^2-3\right)\left(x^2-1\right)-2\left(x^4-3x^2\right)\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0.$$

Следовательно, $x = 0$ – возможная точка перегиба.
Укажем интервалы выпуклости и вогнутости.
Знак $f''(x)$

	$-$	$+$	$-$	$+$	x
		-1	0	1	
	выпукл.	вогн.	выпукл.	вогн.	

Точка 0 (0, 0) – точка перегиба графика функции.
Интервалы выпуклости: $(-\infty;\ 1)$ и (0,1).
Интервалы вогнутости: (–1, 0) и (1, +∞).
5) Наклонные асимптоты.
Найдем

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1} = 0$$

Таким образом, у данной кривой существует одна наклонная асимптота $y = x$.
График функции приводится на рис.5.

б) Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $f(x) = \dfrac{2\ln x}{\sqrt{x}}$ и построить ее график.

Решение

1) Область определения. Точки разрыва. Вертикальные асимптоты.

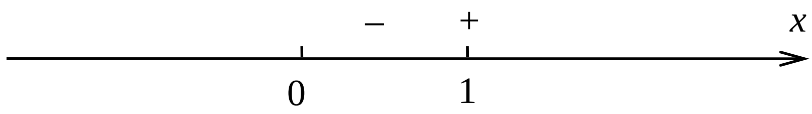
Функция существует в интервале $(0;\ \infty)$, так как в этом интервале существуют функции ln$x$ и $\sqrt{x}$ и, кроме того, знаменатель в этом интервале не обращается в нуль.
Вычислим правый односторонний предел в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$$

Из этого следует, что прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.
2) Корни функции. Интервалы знакопостоянства. Четность, нечетность.

С осью ординат график функции не пересекается, так как при $x = 0$ функция не определена. Положим $y = 0$, $\dfrac{2\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ при $x = 1$. График функции пересекает ось абсцисс в точке A (1, 0). Укажем интервалы знакопостоянства функции.

Знак $f(x)$



Функция $f(x) < 0$ при $x \in (0, 1)$ и $f(x) > 0$ при $x \in (1; +\infty)$.

Функция $f(x)$ – ни четная, ни нечетная, так как при $x < 0$ не существует. Ее график не обладает свойством симметрии.

3) Интервалы возрастания, убывания. Экстремумы функции.

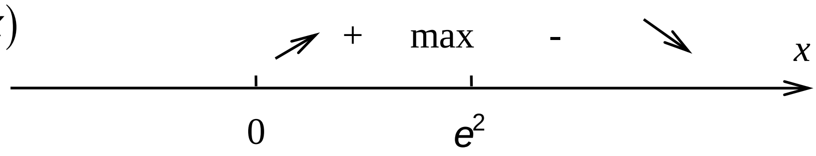
Определим критические точки:

$$f'(x) = 2\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{2 - \ln x}{x\sqrt{x}} = 0,$$

$\ln x = 2; x = e^2$ – критическая точка.

Исследуем ее.

Знак $f'(x)$



Функция достигает максимального значения в точке $B\left(e^2; \dfrac{4}{e}\right)$; ее интервал возрастания $(0; e^2)$, интервал убывания $(e^2, +\infty)$.

4) Интервалы выпуклости, вогнутости. Точки перегиба.

Найдем вторую производную:

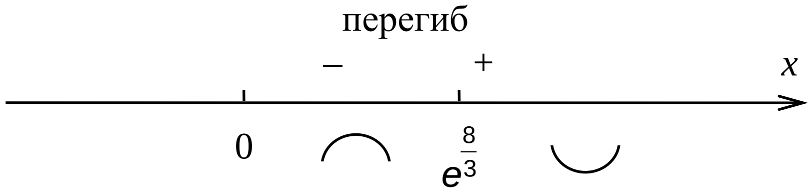
$$f''(x) = \left(\frac{2 - \ln x}{x\sqrt{x}}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}x\sqrt{x} - (2 - \ln x)\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3} =$$

$$= \frac{-\sqrt{x}\left(1 + 3 - \frac{3}{2}\ln x\right)}{x^3} = \frac{-\sqrt{x}\left(4 - \frac{3}{2}\ln x\right)}{x^3} = 0.$$

$$4 - \frac{3}{2}\ln x = 0;\ \ln x = \frac{8}{3};\ x = e^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{e^8}.$$

Исследуем точку $x = \sqrt[3]{e^8}$ на перегиб.

Знак $f''(x)$



В точке $x = e^{8/3}$ график функции имеет перегиб

$$f\left(e^{8/3}\right) = \frac{2\ln e^{8/3}}{\sqrt{e^{8/3}}} = \frac{16/3}{e^{4/3}} = \frac{16}{3e^{4/3}}.$$

На интервале $(0;e^{8/3})$ график функции выпуклый, на интервале $(e^{8/3};+\infty)$ – вогнутый.

5) Наклонные асимптоты будем искать в виде $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2(\ln x)'}{\left(x^{3/2}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{3x\sqrt{x}} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x}} = 0.$$

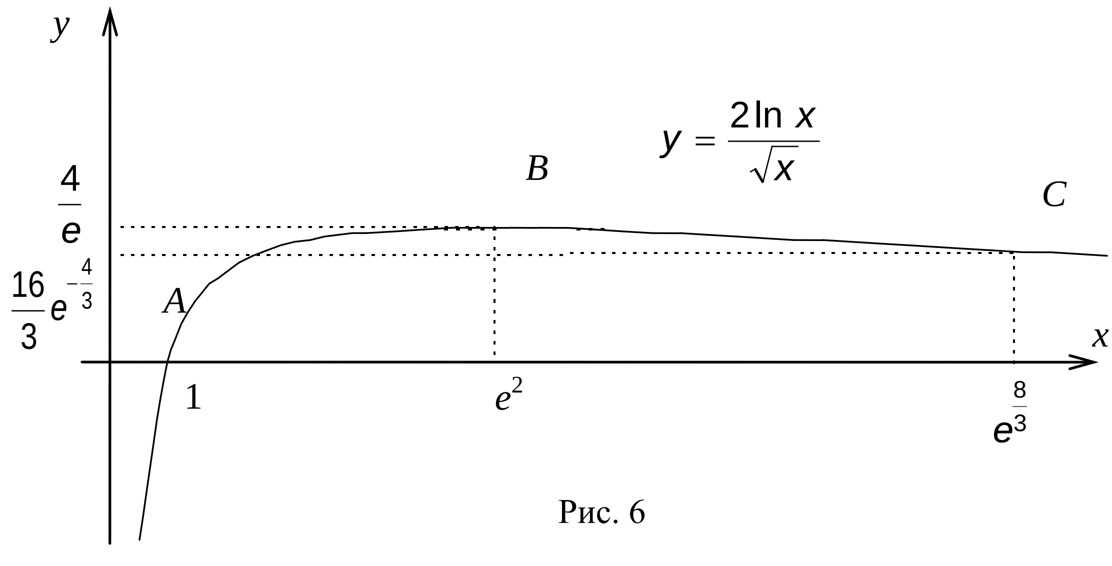


Рис. 6

Ось абсцисс $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции (см. рис. 6).

Задача 11. Проверить, удовлетворяет ли уравнению

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x dy} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

функция $u = xe^{y/x}$.

Решение

Найдем все производные второго порядка от функции $u = xe^{y/x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{y/x} + xe^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = e^{y/x}\left(1 - \frac{y}{x}\right) = e^{y/x}\frac{x-y}{x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{y/x} \cdot \frac{1}{x} = e^{y/x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot \frac{x-y}{x} + e^{y/x} \cdot \frac{x-(x-y)}{x^2} = e^{y/x}\frac{y^2}{x^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{y/x}\frac{1}{x} = \frac{e^{y/x}}{x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{ye^{y/x}}{x^2}.$$

Подставим найденные производные в уравнение

$$x^2 e^{y/x}\frac{y^2}{x^2} + 2xy\left(-\frac{ye^{y/x}}{x^2}\right) + y^2\frac{e^{y/x}}{x} =$$

$$= \frac{e^{y/x}}{x}\left(y^2 - 2y^2 + y^2\right) = 0.$$

Получили тождество и, следовательно, функция удовлетворяет уравнению.

Задача 12. Найти производную и градиент скалярного поля $u = x^2 y^2 z - \ln(z-1)$ в точке M (1; 1; 2) по направлению вектора $\bar{l} = 5\bar{i} - 6\bar{j} + 2\sqrt{5}\bar{k}$.

Решение

Производная скалярного поля $u(x, y, z)$ по направлению вектора $\bar{l} = l_1\bar{i} + l_2\bar{j} + l_3\bar{k}$ вычисляем по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha = \dfrac{l_1}{|l|}$; $\cos\beta = \dfrac{l_2}{|l|}$; $\cos\gamma = \dfrac{l_3}{|l|}$ являются координатами единичного вектора $\overline{l_0}$, à $|\bar{l}| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}$.

Найдем длину вектора $\bar{l}$.

$$|\bar{l}| = \sqrt{5^2 + 6^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{25 + 36 + 20} = \sqrt{81} = 9.$$

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{5}{9}$; $\cos\beta = -\dfrac{2}{3}$; $\cos\gamma = \dfrac{2\sqrt{5}}{9}$.

Частные производные функции $u(x, y, z)$ в точке M (1; 1; 2) имеют значения:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left(2xy^2z\right)\Big|_M = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left(2x^2yz\right)\Big|_M = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.\left(x^2y^2 - \frac{1}{z-1}\right)\right|_M = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2-1} = 0.$$

Подставляя в формулу, найдем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = 4 \cdot \frac{5}{9} + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 0\frac{2\sqrt{5}}{9} = 4\left(\frac{5}{9} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{9}.$$

Градиент скалярного поля $u(x, y, z)$ есть вектор $\overline{\mathrm{grad}u}$, направленный по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания поля. Вычисляем по формуле

$$\overline{\mathrm{grad}u} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$$

Подставляя значения частных производных в последнюю формулу, получим:

$$\overline{\mathrm{grad}u} = 4\bar{i} + 4\bar{j}.$$

Задача 13. Найти формулу вида $y = ax + b$ методом наименьших квадратов по данным таблицы:

x	1	2	3	4	5
y	5,9	6,9	5,4	3,4	3,9

Решение

Найдем коэффициенты a и b путем минимизации суммы

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(y_i - (ax_i + b)\right)^2.$$

По данным таблицы составим систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\,2} - b\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} y_i - a\sum_{i=1}^{\infty} x_i - bn = 0, \end{cases}$$

решив которую найдем параметры a и b.

Предварительно вычислим суммы:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 5{,}9 + 13{,}8 + 16{,}2 + 13{,}6 + 19{,}5 = 69;$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^{\,2} = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55;$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15;$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 5{,}9 + 6{,}9 + 5{,}4 + 3{,}4 + 3{,}9 = 25{,}5.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 55a + 15b = 69 \\ 3a + b = 5{,}1 \Rightarrow b = 5{,}1 - 3a, \end{cases}$$

$$55a + 76{,}5 - 45a = 69,$$

$$10a = -7{,}5 \Rightarrow a = -0{,}75,$$

$$b = 5{,}1 + 2{,}25 = 7{,}35.$$

Искомая формула имеет вид:

$$y = -0{,}75x + 7{,}35.$$

График искомой зависимости приводится на рис. 7.

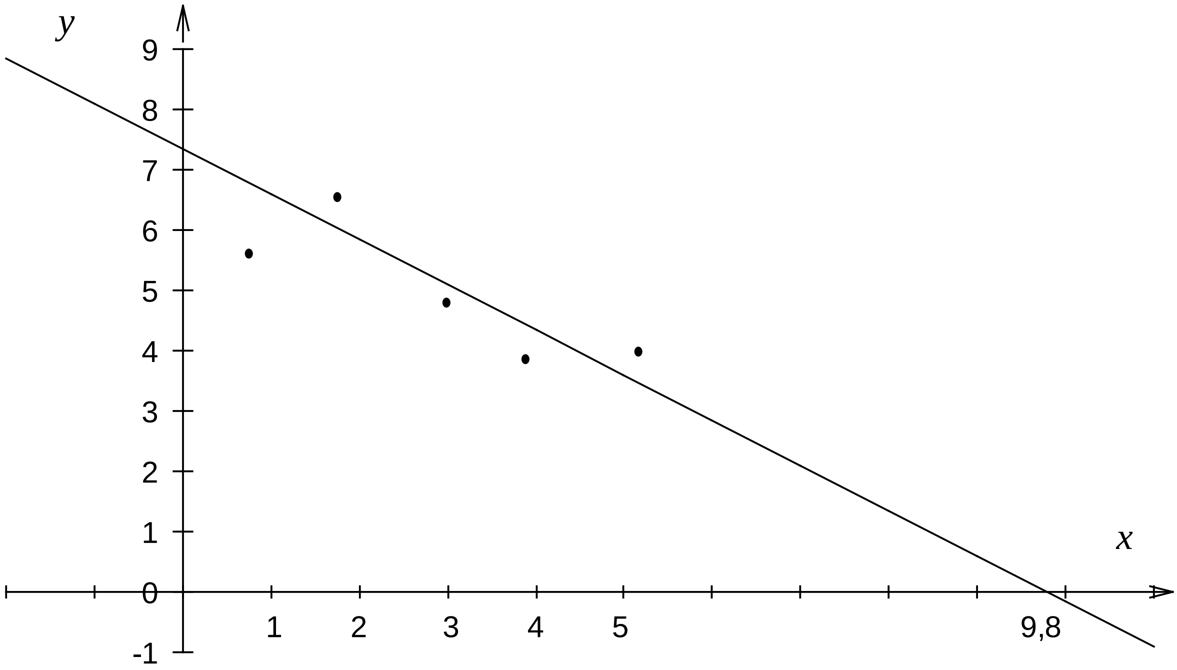


Рис. 7

Задача 14. Найти решения уравнения $z^2 - 20z + 110 = 0$ в комплексной области.

Решение:

$$D = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \cdot 110 = 100 - 440 = -40 = (-1) \cdot 40 = i^2 \cdot 40$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{i^2 \cdot 40}}{2} = 10 \pm \sqrt{10}i$$

Задача 13. Даны комплексные числа $z_1 = \sqrt{5} - \sqrt{5}i$, $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$, $z_3 = \left(\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - i\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

1). Найти модуль и аргумент комплексных чисел z_1, z_2, z_3 и изобразить их на чертеже.

2). Записать комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической форме и выполнить следующие действия: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^3, $\sqrt[4]{z_2}$.

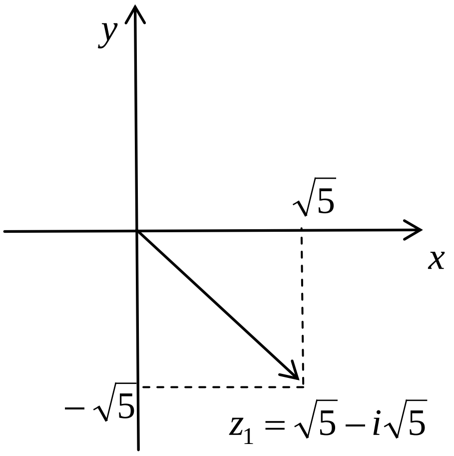
3). Записать комплексные числа z_1 и z_2 в показательной форме и выполнить следующие действия: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_2}{z_1}$, z_2^5, $\sqrt[4]{z_1}$.

4). Записать комплексное число z_3 в арифметической форме и выполнить следующие действия: $z_1 + 2z_3$; $z_2 - 2z_3$; $z_1 \cdot z_3$; $\frac{z_2}{z_3}$.

Решение:

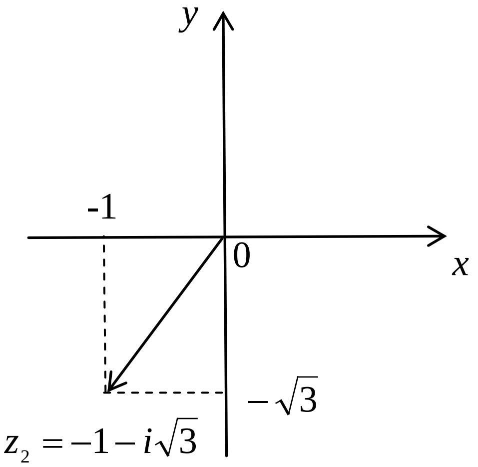
1). Для комплексного числа $z_1=\sqrt{5}-\sqrt{5}i$ имеем $x_1=\sqrt{5}>0$, $y_1=-\sqrt{5}<0$. Тогда $\left|z_1\right|=r_1=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{10}$.

$$\varphi_1=\arg z_1=arctg\,\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}+2\pi=arctg(-1)+2\pi=-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}$$



Для комплексного числа $z_2=-1-\sqrt{3}i$ имеем $x_1=-1<0$, $y_1=-\sqrt{3}<0$. Тогда $\left|z_2\right|=r_2=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$.

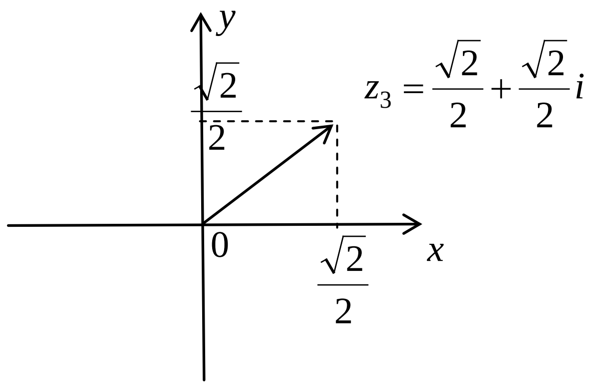
$$\varphi_2=\arg z_2=arctg\,\frac{-\sqrt{3}}{-1}+\pi=arctg\left(\sqrt{3}\right)+\pi=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}.$$



Запись $z_3 = \left(\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - i\cos\left(\frac{9\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ не является тригонометрической формой записи комплексного числа. Перепишем z_3 в виде $z_3 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, так как $\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$, а $\cos\left(\frac{9\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}$.

Следовательно, $|z_3| = 1,\ \varphi_3 = \frac{\pi}{4}$.

Алгебраическая форма этого числа имеет вил: $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.



2). Тригонометрические формы комплексных чисел z_1 и z_2 имеют соответственно вид:

$$z_1 = \sqrt{10}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right);\ z_2 = 2\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right) =$$

$$= 2\sqrt{10}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\sqrt{10}\left(\cos\frac{37\pi}{12} + i\sin\frac{37\pi}{12}\right) = 2\sqrt{10}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) =$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{10}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

$$z_1^3 = \left(\sqrt{10}\right)^3\left(\cos 3\cdot\frac{7\pi}{4} + i\sin 3\cdot\frac{7\pi}{4}\right) = 10\sqrt{10}\left(\cos\frac{21\pi}{4} + i\sin\frac{21\pi}{4}\right) =$$

$$= 10\sqrt{10}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

$\sqrt[4]{z_2}$:

$$k=0,\ z=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3\cdot 4}+i\sin\frac{4\pi}{3\cdot 4}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$k=1,\ z=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{10\pi}{12}+i\sin\frac{10\pi}{12}\right);$$

$$k=2,\ z=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+4\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+4\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{16\pi}{12}+i\sin\frac{16\pi}{12}\right);$$

$$k=3,\ z=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+6\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+6\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{22\pi}{12}+i\sin\frac{22\pi}{12}\right).$$

3). Показательные формы комплексных чисел z_1 и z_2 имеют соответственно вид $z_1=\sqrt{10}e^{i\frac{7\pi}{4}}$ и $z_2=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

$$z_1\cdot z_2=2\sqrt{10}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2\sqrt{10}e^{i\frac{13\pi}{12}};$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{2}{\sqrt{10}}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{7\pi}{4}\right)}=\frac{2}{\sqrt{10}}e^{-\frac{5\pi}{12}i};$$

$$z_2^5=2^5e^{5\cdot\frac{4\pi}{3}i}=32e^{\frac{20\pi}{3}i};$$

$\sqrt[4]{z_1}$:

$$k=0;\ z=\sqrt[8]{10}e^{\frac{7\pi}{4\cdot 4}i}=\sqrt[8]{10}e^{\frac{7\pi}{16}i};$$

$$k=1;\ z=\sqrt[8]{10}e^{\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{4}i}=\sqrt[8]{10}e^{\frac{15\pi}{16}i};$$

$$k=2;\ z=\sqrt[8]{10}e^{\frac{\frac{7\pi}{4}+4\pi}{4}i}=\sqrt[8]{10}e^{\frac{23\pi}{16}i};$$

$$k=3;\ z=\sqrt[8]{10}e^{\frac{\frac{7\pi}{4}+6\pi}{4}i}=\sqrt[8]{10}e^{\frac{31\pi}{16}i}.$$

4). Арифметическая форма комплексного числа z_3 имеет вид $z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

$$z_1+2z_3=\sqrt{5}-\sqrt{5}i+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)i;$$

$$z_2-2z_3=-1-\sqrt{3}i+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\left(-1-\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)i\,;$$

$$z_1\cdot z_3=\left(\sqrt{5}-\sqrt{5}i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}i+\frac{\sqrt{10}}{2}i-\frac{\sqrt{10}}{2}i^2=\sqrt{10}\,;$$

$$\frac{z_2}{z_3}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}=\frac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{\sqrt{6}}{2}i^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot i^2}=$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)i\,.$$

Задача 16. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}dx$

Сделаем подстановку $\sin x=t$, тогда $\cos x dx=dt$, следовательно, $d(\sin x)=\cos x dx$. Согласно формуле $\int\frac{dU}{\sqrt{a^2-U^2}}=\arcsin\frac{U}{a}+C$, находим:

$$\int\frac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sqrt{3^2-(\sin x)^2}}=\arcsin\frac{\sin x}{3}+C.$$

б) $\int\cos\frac{7x}{2}\cdot\cos\frac{4x}{5}dx$

Применяя формулу $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$, будем иметь:

$$\int=\frac{1}{2}\int\left[\cos\left(\frac{7x}{2}+\frac{4x}{5}\right)+\cos\left(\frac{7x}{2}-\frac{4x}{5}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{43x}{10}+\cos\frac{28}{10}x\right)dx=\frac{1}{2}\int\cos\frac{43x}{10}dx+\frac{1}{2}\int\cos\frac{28x}{10}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{43}\sin\frac{43x}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{28}\cdot\sin\frac{28x}{10}+C=\frac{5}{43}\sin\frac{43x}{10}+\frac{5}{28}\sin\frac{28x}{10}+C\,.$$

в) $\int(x-1)\sin 2x dx$

Примем $U=x-1$, $dV=\sin 2x dx$, тогда $dU=dx$, $V=-\frac{1}{2}\cos 2x$.

Используя формулу интегрирования по частям $\int UdV=UV-\int VdU$, получим:

$$\int (x-1)\sin 2x dx = \begin{vmatrix} U = x-1 & dU = dx \\ dV = \sin 2x dx & V = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{x-1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx \ = \frac{1-x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

г) $\int (1-2x)e^{3x} dx$

Примем $U = 1-2x$, $dV = e^{3x}dx$, тогда $dU = -2dx$, $V = \frac{1}{3}e^{3x}$.

Используя формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$, получим:

$$\int (1-2x)e^{3x}dx = \begin{vmatrix} U = 1-2x & dU = -2dx \\ dV = e^{3x}dx & V = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1-2x}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1-2x}{3}e^{3x} + \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

д) $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Выделим в числителе производную подкоренного выражения и разложим полученный интеграл на разность двух интегралов. Применяя формулы $\int \frac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C$ и $\int \frac{dU}{\sqrt{U^2+a^2}} \ln\left|U + \sqrt{U^2+a^2}\right| + C$, получим:

$$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{(2x+2)-3}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx = \int \frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}} =$$

$$= 2\sqrt{^2+2x+3} - 3\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right| + C.$$

е) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$.

Применяя подстановку $x = 2\operatorname{tg} t$, $dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}$,

$$\operatorname{tg} t = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} = \frac{x^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 t = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4}\sin^2 t \Rightarrow \sin^2 t\left(1+\frac{x^2}{4}\right) = \frac{x^2}{4} \Rightarrow \sin^2 t = \frac{\frac{x^2}{4}}{1+\frac{x^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 t = \frac{x^2}{4+x^2} \Rightarrow \sin t = \sqrt{\frac{x^2}{4+x^2}}\text{, получим:}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2dt}{\cos^2 t\cdot 4\operatorname{tg}^2 t\sqrt{4+4\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^2 t\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^2 t\sqrt{\dfrac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{4}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4}(\sin t)^{-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{4\sin t} + C = -\frac{1}{4\sqrt{\dfrac{x^2}{4+x^2}}} + C.$$

ж) $\int \frac{16xdx}{(2x^2-x)(x+1)}$.

Разложим знаменатель на произведение линейных множителей и представим рациональную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{16x}{x(2x-1)(x+1)} = \frac{16}{(2x-1)(x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Должны иметь $16 = Ax + A + 2Bx - B$ или $16 = (A+2B)x + A - B$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ A - B = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2B \\ -2B - B = 16. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $A = \frac{32}{3}$ и $B = -\frac{16}{3}$.

Интеграл представляется разностью двух интегралов:

$$\int \frac{16xdx}{(2x^2-x)(x+1)} = \int \frac{\frac{32}{3}}{2x-1}dx - \int \frac{\frac{16}{3}}{x+1}dx =$$

$$= \frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1| - \frac{16}{3}\ln|x+1| + C =$$

$$= \frac{16}{3}\left(\ln|2x-1| - \ln|x+1|\right) + C = \frac{16}{3}\ln\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| + C.$$

Задача 17. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin axdx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}}(x+3)\sin axdx = \begin{vmatrix} U = x+3 \\ dV = \sin axdx \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} du = dx \\ V = -\frac{1}{a}\cos ax \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{x+3}{a}\cos ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2a}}\cos axdx = -\frac{x+3}{a}\cos ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \frac{1}{a^2}\sin ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} =$$

$$= -\frac{\frac{\pi}{2a}+3}{a}\cos\left(a\cdot\frac{\pi}{2a}\right) + \frac{0+3}{a}\cos 0^\circ + \frac{1}{a^2}\sin\left(a\cdot\frac{\pi}{2a}\right) - \frac{1}{a}\sin 0 =$$

$$= \frac{3}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{3a+1}{a^2}.$$

б) $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Примем $\sqrt{1+3x} = t$. Найдем пределы интегрирования для t:
если x=0, то t=1;
если x=5, то t=4.

Выразим x: $1+3x = t^2$, $x = \frac{t^2-1}{3}$ и найдем дифференциал обеих частей выражения $dx = \frac{2tdt}{3}$. Подставив x, dx и найденные пределы интегрирования в интеграл, получим:

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \begin{vmatrix} \sqrt{1+3x} = t, \quad dx = \frac{2tdt}{3} \\ x = 0, t = 1 \\ x = 5, t = 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \int_1^4 \frac{(t^2-1)}{3\cdot t}\frac{2t}{3}dt = \frac{2}{9}\int_1^4\left(t^2-1\right)dt = \frac{2}{9}\int_1^4\left(t^2-1\right)dt =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{9}\left(\frac{64}{3}-4-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{63}{3}-3\right) = \frac{2}{9}\cdot 18^2 = 4$$

Задача 18. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$.

Рассмотрим предел:

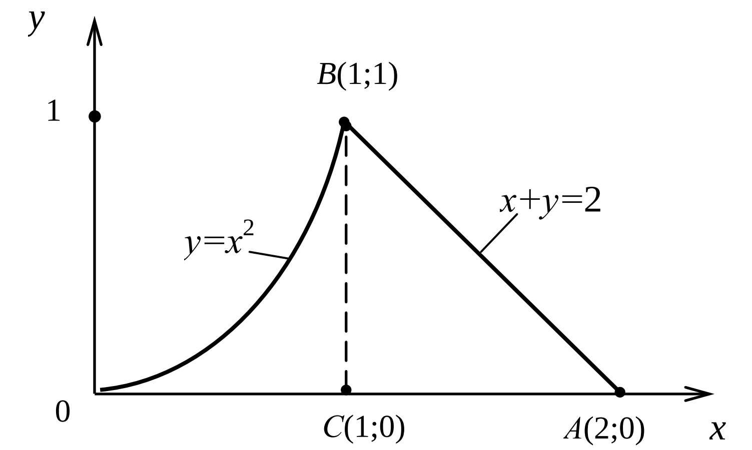
$$\lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{\beta\to\infty}\int_{0}^{\beta}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{\alpha\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_{\alpha}^{0}+\lim_{\beta\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{\beta}=$$

$=-\operatorname{arctg}(-\infty)+\operatorname{arctg}(+\infty)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi$. $\Rightarrow$ Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$ сходится.

Задача 19. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$.

Решение:

Область интегрирования D ограничена линиями: $y=0$, $x=\sqrt{y}$, $x=2-y$.



Если же сначала интегрировать по y, затем по x, то область D сначала надо разбить на две области OBC и CBA. Получим:

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

Задача 20.

а). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями и осью OX (рис.8).

Решение:

По уравнениям границы области D построим данную фигуру. Линии, ограничивающие ее, пересекаются в точке M (1; 4). Должны иметь и .

Откуда

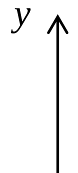


Рис.8

Для области *D* справедливы неравенства

Искомая площадь

б). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией (рис.9).

Решение:

Построив кривую и замечая, что она симметрична относительно полюса и что при изменении φ от 0 до текущая точка (φ, ρ) отсечет половину кривой, расположенную выше полярной оси, будем иметь:

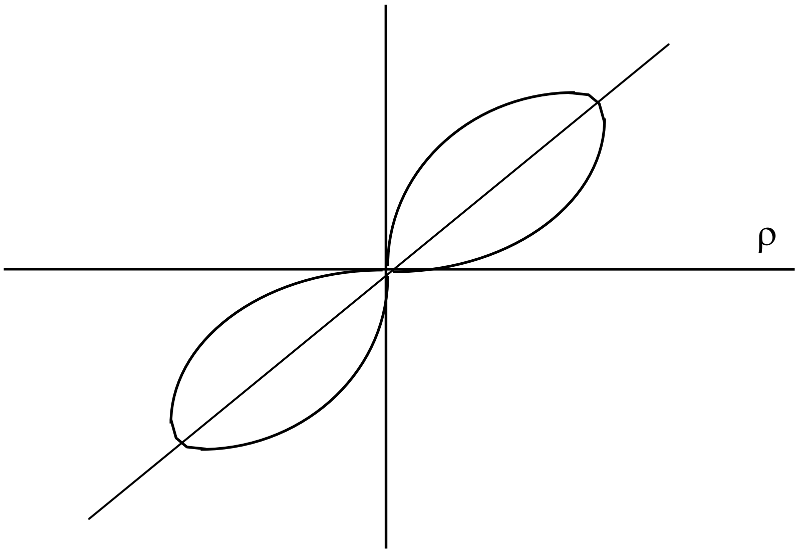


Рис.9

Задача 21. Найти объем тела, ограниченного данными поверхностями $x + y + z = 4, \quad x = 3, \quad y = 2, \quad x = o, \quad y = 0, \quad z = 0$ (рис.10,11)

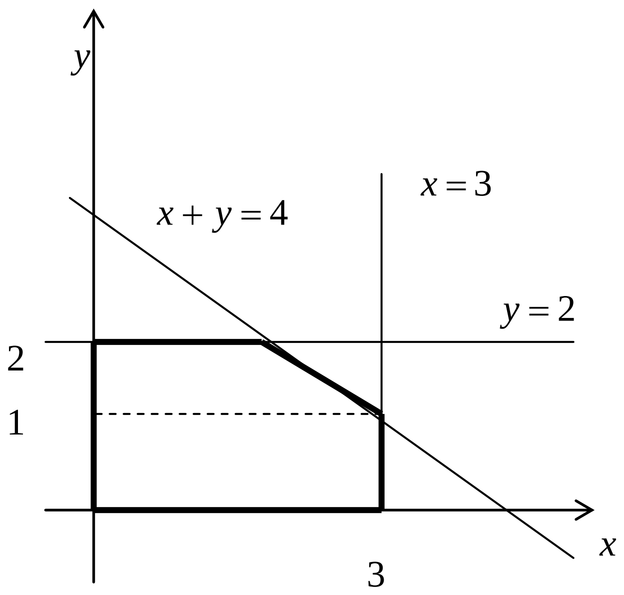


Рис.10

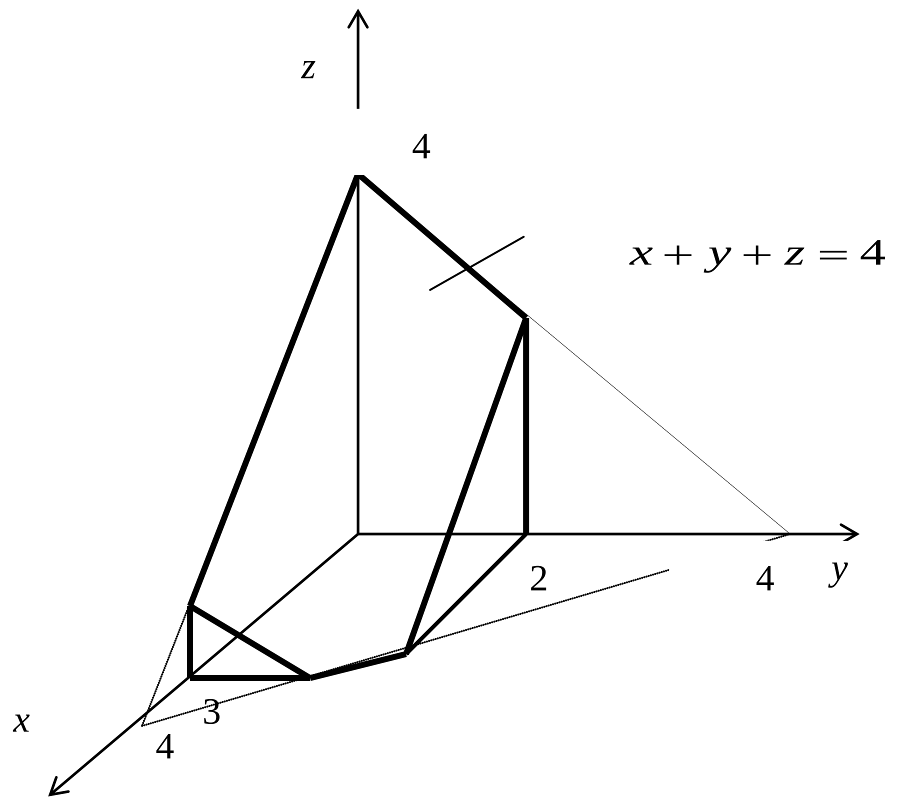


Рис.11

$$V=\int_0^1 dy\int_0^3 dx\int_0^{4-x-y} dz+\int_1^2 dy\int_0^{4-y} dx\int_0^{4-x-y} dz=\int_0^1 dy\int_0^3 (4-x-y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{4-y}(4-x-y)dx=$$

$$=\int_0^1\left(4x-\frac{x^2}{2}-yx\right)\Big|_0^3\,dy+\int_1^2\left(4x-\frac{x^2}{2}-yx\right)\Big|_0^{4-y}\,dy=$$

\

$$=\int_0^1 (12-\frac{9}{2}-3y)dy+\int_1^2\left(4(4-y)-\frac{(4-y)^2}{2}-y(4-y)\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{15}{2}-3y\right)dy+\int_1^2\left(16-4y-8+4y-\frac{y^2}{2}-4y+y^2\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{15}{2}-3y\right)dy+\int_1^2\left(8-4y+\frac{y^2}{2}\right)dy=\left(\frac{15}{2}y-\frac{3y^2}{2}\right)\Big|_0^1+\left(8y-2y^2+\frac{y^3}{6}\right)\Big|_1^2=\frac{55}{6}\text{ кв.ед.}$$

Задача 22. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного конической поверхностью $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=3$ (рис.12,13).

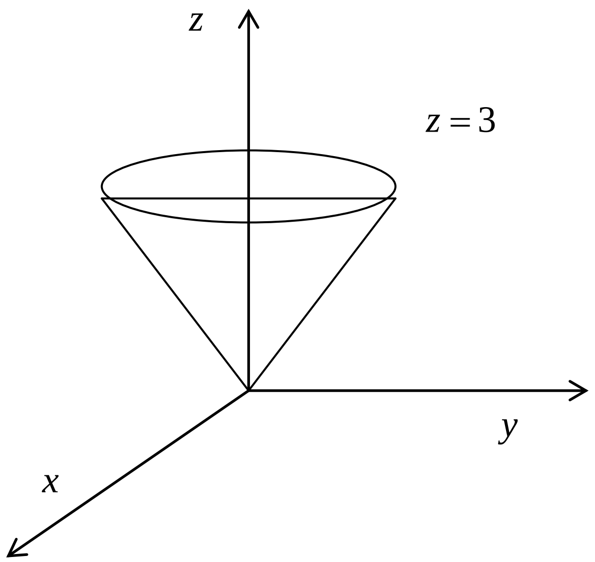


Рис.12

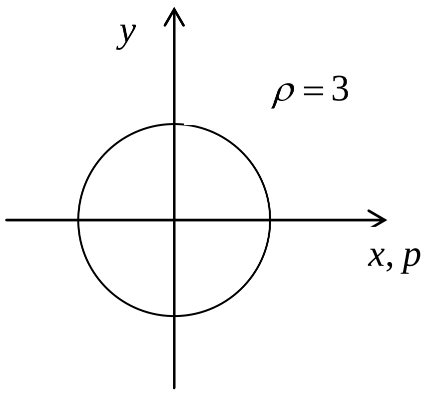


Рис.13

$$M_{yz}=M_{xz}=0$$

$$M_{xy}=\iint_D dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} z\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\rho\,d\rho\int_\rho^3 z\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\rho\frac{z^2}{2}\Big|_\rho^3 d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\left(9\rho-\rho^3\right)d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{9\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^3 d\varphi=\frac{1}{2}\int_9^{2\pi}\left(\frac{81}{2}-\frac{81}{4}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{81}{8}\varphi\Big|_0^{2\pi}==\frac{81}{4}\pi$$

$$m=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\rho\,d\rho\int_\rho^3 dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\rho(3-\rho)d\rho=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^3 d\varphi=$$

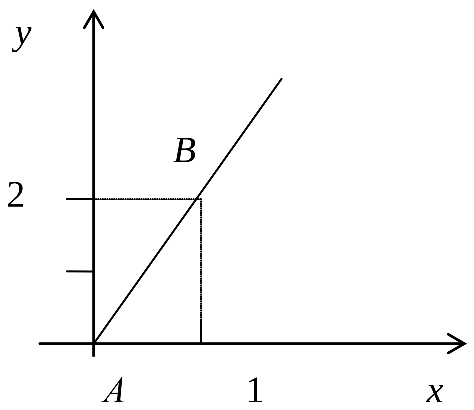
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{27}{2}-\frac{27}{3}\right)d\varphi=9\pi$$

$$\bar{z}=\frac{81}{4}\pi/9\pi=\frac{9}{4}$$

C $(0,0,\frac{9}{4})$.

Задача 23. Вычислить $\int_{AB}\frac{dL}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где AB - отрезок прямой, соединяющий точки $A(0,2)$ и $B(1,2)$.

Решение:



Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Тогда уравнение данной прямой: $y=2x$.

Дифференциал дуги: $dL=\sqrt{1+\left(2x\right)'^2}\,dx=\sqrt{1+4}dx=\sqrt{5}dx$.

$$\int_{AB}\frac{dL}{\sqrt{x^2+y^2+4}}=$$

$$=\int_0^1\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+(2x)^2+4}}dx=\int_0^1\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5x^2+4}}dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}\right|\Big|_0^1=$$

$$= \ln\left|1 + \sqrt{\frac{9}{5}}\right| - \ln\left|1 + \sqrt{\frac{4}{5}}\right| = \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Задача 24. Вычислить если линия L – дуга параболы $y = x^2$, расположенная между точками A (0, 0) и B (2, 4).

Решение

Из $y = x^2$ следует . Откуда

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left(P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x)\right)dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x \cdot x^2 + \left(x^2 + x^2\right) \cdot 2x\right)dx = \int_0^2 5x^3 dx = \frac{5}{4}x^4\Big|_0^2 = 20.$$

Задача 25. Проверить, является ли заданное выражение полным дифференциалом функции , и найти . Сделать проверку.

Решение

Имеем: .

Выполняется равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -8xy.$$

Следовательно, данное выражение действительно является полным дифференциалом некоторой функции

Справедливо:

где криволинейный интеграл в правой части равенства можно брать по любому пути L.

Выберем в качестве пути интегрирования L ломаную, состоящую из двух звеньев L_1, L_2 параллельных осям координат (рис.14).

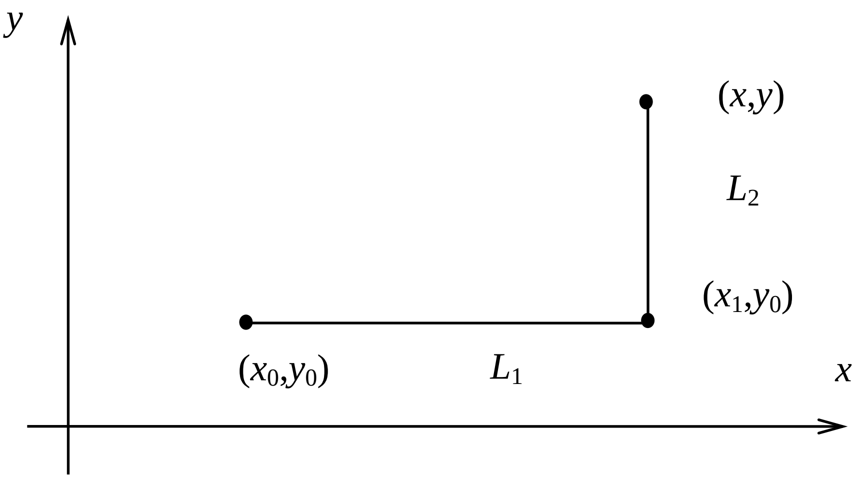


Рис. 14

Тогда

$$u(x,y) = (L_1)\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} 4x\left(x^2 - y\right)dx - 4y\left(x^2 - y^2\right)dy +$$

$$+ (L_2)\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} 4x\left(x^2 - y^2\right)dx - 4y\left(x^2 - y^2\right)dy.$$

Но на L_1 $y = y_0 = \mathrm{const},\ dy = 0;$
на L_2 $x = \mathrm{const},\ dx = 0.$

Следовательно,

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} 4\left(x^2 - y_0^2\right)x\,dx - \int\limits_{y_0}^{y} 4\left(x^2 - y^2\right)y\,dy + c.$$