**Численные методы**

Примеры выполнения расчётных заданий по дисциплине КТВвММ

студентами дневной и заочной формы обучения

2014

**Содержание**

1. Задание 0\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_3
2. Задание 1\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_6
3. Задание 2\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_10
4. Задание 3\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_16
5. Задание 4\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_21
6. Задание 5\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_27
7. Задание 6\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_29
8. Задание 7\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_33

Список использованной литературы\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_38

**ЗАДАНИЕ 0**

**0.1 Условие**

 Дать письменные развёрнутые обоснованные ответы на контрольные вопросы (по каждому методу из соответствующих разделов курса, а не только по тем, которые применялись в работе). Номера вопросов выбираются, начиная с (N4+1)-ого вопроса и далее нужно ответить на каждый четвёртый вопрос в общем списке вопросов.

**0.2 Ответы на контрольные вопросы**

 Зачётная книжка № Д-12091

N4 = 91/4 = 22 остаток 3

Номера вопросов N4+1 = 3+1 = 4

 Вопрос № 4: Может ли метод Ньютона применяться для экстраполяции?

 Ответ: Может, в методе не заложено ограничений для применения для экстраполяции.

 Вопрос № 8: Можно ли располагать неравномерно узлы интерполяции при использо­вании метода Ньютона?

 Ответ: Нет, неравномерно располагать узлы интерполяции при использовании формул с конечными разностями нельзя, так как невозможно в этом случае рассчитать конечные разности; существует развитие методов Ньютона, позволяющее использовать неравномерно расположенные узлы, в этом случае используются разделенные, а не конечные разности.

 Вопрос № 12: Может ли степень аппроксимирующего полинома быть выше числа узлов аппроксимации?

 Ответ: Нет, не может, так как такой полином в общем виде будет содержать коэффициентов больше, чем условий для их определения (прохождение через все заданные точки). Однако если задать «усеченный» полином с меньшим числом элементов, то можно.

 Вопрос № 16: Как можно обеспечить немного отличающуюся относительную погреш­ность аппроксимации на разных участках, если функция имеет очень большой размах?

 Ответ: Для обеспечения не сильно отличающихся относительных отклонений в различных точках при большом размахе функции можно критерий близости сформировать из относительных, а не из абсолютных отклонений.

 Вопрос № 20: Можно ли обеспечить требование, чтобы аппроксимирующая функция проходила через отдельные выбранные точки?

 Ответ: Практически можно: для этого достаточно задать в этих точках очень высокие весовые коэффициенты, что приведет к точному прохождению аппроксимирующей функции через эти точки (число таких точек не должно быть большим по сравнению с большим числом точек).

 Вопрос № 24: Как в методе прямоугольников уменьшить погрешность нахождения ин­теграла?

 Ответ: При использовании метода прямоугольников для повышения точности интегрирования можно увеличить число участков разбиения исходного интервала, на каждом маленьком интервале интеграл будет вычисляться точнее, и, если число интервалов не слишком велико, общее значение интеграла будет получено с меньшей общей погрешностью.

 Вопрос № 28: Дана подынтегральная функция *f(x)* = 5*x*3. Какой из методов даст наиболее точный результат?

 Ответ: Предложенная функция кубическая, следовательно, метод Симпсона даст абсолютно точный результат. Он и будет наиболее эффективен, так как он самый простой из всех методов, способных вычислить этот интеграл точно.

 Вопрос № 32: Всегда ли позволяет метод половинного деления вычислить отделённый корень уравнения с заданной погрешностью?

 Ответ: Если нелинейная функция в левой части уравнения непрерывна, то метод половинного деления всегда позволит получить корень с заданной погрешностью, так как процесс решения в этом случае не зависит от свойств функции.

 Вопрос № 36: Можно ли найти корень методом половинного деления, если он находится на границе интервала?

 Ответ: Можно найти корень, находящийся на границе интервала.

 Вопрос № 40: Как выбираются концы отрезка интервала в методе хорд?

 Ответ: В методе хорд для монотонной функции *f(x)* один конец является закрепленным, а второй определяется точкой пересечения хорды с осью *х.* Закрепленный конец выбирается исходя из анализа знаков функции и ее второй производной на концах интервала.

 Вопрос № 44: Исходя из чего выбирается в методе Ньютона первое приближение *х0*?

 Ответ: Начальное приближение *х0* в методе Ньютона выбирается таким образом, чтобы касательная к функции в точке х0 пересекала ось *х* внутри начального интервала, где отделен корень. Это оценивается по знакам функции и второй производной или практически методом проб и ошибок.

 Вопрос № 48: В каких случаях применение метода Ньютона не рекомендуется?

 Ответ: Если функция *f(x)* немонотонна, то метод Ньютона в классическом варианте может не дать гарантированный результат (можно в отдельных случаях получить корень, если на каждом шаге заново определять закрепленный конец).

 Вопрос № 52: Присутствие каких особенностей f(x) допустимо для метода парабол, чтобы гарантировано можно было решить уравнение f(x) = 0?

 Ответ: Уравнение должно быть непрерывным, монотонным и третьего порядка.

 Вопрос № 56: К какой группе относится модифицированный метод Эйлера?

 Ответ: Модифицированный метод Эйлера относится к группе одношаговых методов, так как для нахождения значения функции в следующей точке требуется знание только одной текущей точки.

 Вопрос № 60: Когда используется метод Эйлера?

 Ответ: Метод Эйлера в основном используется как учебный, в практических расчетах он дает значительную погрешность.

 Вопрос № 64: Достоинства многошаговых методов.

 Ответ: К достоинствам многошаговых методов относят меньший требующийся объем вычислений при реализации метода, так как при одинаковом порядке метода (например, четвертом в методах Рунге – Кутта и Милна) требуется не четыре, а только два раза вычислять правую часть дифференциального уравнения (хотя требуется дополнительная память для хранения предыдущих точек).

**ЗАДАНИЕ 1**

 **1.1 Условие**

 Используя заданную функцию f(x), которая выбирается из таблицы № 1 по числу N10, рассчитать 5 точек в интервале [а, b/4], которые использовать как узлы интерполяции. Выбрать точку *х* внутри этого интервала, в которой восстановить значение функции с помощью заданного метода интерполяции. Метод интерполяции выбрать по числу N4+1из следующего общего списка методов интерполяции:

1. Метод Лагранжа;
2. Метод Ньютона;
3. Метод Чебышева;
4. Метод сплайнов (из-за сокращения количества лекций и сложности данного метода студентам разрешается заменить этот метод любым другим).

 Найти погрешность интерпо­ляции путем сравнения значения *х*, полученного по интерполяционному полиному, и рассчитанного по f(x). Сделать выводы о том, устраивает полученный результат интерполяции по погрешности или нет. Если результат не устраивает, то следует наметить, что необходимо сделать, чтобы снизить погрешность.

 **1**.**2**. **Решение**

 Зачётная книжка № Д-12091

N10 = 91/10 остаток 1; N4 = 91/4 = 22 остаток 3; N4+1 = 3+1 = 4

 **1.2.1** **Исходные данные**

**Таблица 1 – Исходные данные**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Функция f(x)  | N10  | Параметры | a | b |
|  | А | В | C | D |
| Ax +Bsin(Cx +D)  | 1  | 1 | 10 | 1 | 1 | -10 | 5 |

Метод сплайнов заменяем методом Лагранжа.

 **1.2.2 Определение узлов интерполяции**

 Заданная функция x + 10sin(x+1); интервал [-10;5/4]

 Значение узлов интерполяции для метода Лагранжа выбираются произвольно.

**Таблица 2 – узлы интерполяции**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер узла | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Значение аргумента, x | -10 | -7 | -4,5 | -1,5 | 1,25 |

*f*(-10) = -10 +10sin(-10+1) = -14.1212

*f*(-7) = -7 +10sin(-7+1) = -4.20585

*f*(-10) = -4.5 +10sin(-4.5+1) = -0.99217

*f*(-10) = -1.5 +10sin(-1.5+1) = -6.294

*f*(-10) = 1.25 +10sin(-1.25+1) = 9.031

 **1.2.3 Определение интерполяционного полинома Лагранжа**

 Для метода Лагранжа значение n+1=5, то есть порядок интерполяционного полинома n=4.

 В общем случае интерполяционный полином Лагранжа представляется как:

где: *y*i – значение исходной таблицы данных.

 *Q*i – вспомогательные функции.

 Для нашего случая полином 4-го порядка равен:

 **1.2.4 Определение вспомогательных функций Qi(x)**

 Вспомогательные функции Qi(x) определяются как

 Для нашего полинома вспомогательные функции будут следующими:

 **1.2.5 Определение интерполяционного полинома**

Подставляя вспомогательные функции и значения ординат узлов интерполяции получаем необходимую интерполяционную функцию.

*L*4(*x*) = *y0* + *y1 +*

*+ y2 + y3  +*

*+ y4*

 **1.2.6 Восстановление исходной функции в заданной точке, при помощи интерполяционного полинома**

Примем точку, в которой будем восстанавливать исходную функцию за *x* = -2.

 *L*4(-2) = -14.121+ +4.206- 0.99-

 6.294+9.031

*L*4(-2) = -5.66335

 **1.2.7 Определение погрешности интерпо­ляции путем сравнения значения *х*, полученного по интерполяционному полиному, и рассчитанного по f(x)**

**Рис.1 - Определение интерполяционного полинома Лагранжа**

*f*(-2) = -2 +10sin(-2+1) = -10.4147

Для оценки погрешности между исходной и интерполяционной функции воспользуемся формулой:



*R*(-2)=|-10.4147 – (-5.6636)| = 4.75115

**1.2.8 Вывод**

 Мы получили значительную погрешность и для того, чтобы её снизить необходимо увеличить число узлов на заданном интервале.

**ЗАДАНИЕ 2**

 **2.1 Условие**

Используя полученные на предыдущем этапе точки построить аппроксимирующие полиномы второго порядка **у = a2х2 + a1x + a0** ме­тодом наименьших квадратов при всех одинаковых весовых коэффициен­тах и при весовом коэффициенте в третьей точке в 3 раза большем, чем в остальных (т.е. при 3=3). Получить среднеквадратичную погрешность аппроксимации, величину квадратичного критерия близости и расчётное значение **y** в третьей точке. Сравнить полученные результаты. Сделать выводы о том, устраивает ли полученное аппроксимирующее уравнение второго порядка по погрешности, сравнивая среднеквадратичную погрешность с заданной погрешностью в обоих случаях, т.е. и при всех одинаковых весовых коэффициентах и при 3=3. Если результат не устраивает, то наметить путь, что делать в таком случае дальше. Также проанализировать, как повлияло введение весового коэффициента 3=3 на точность аппроксимации в третьей точке (по величине абсолютной погрешности в этой точке) и на точность аппроксимации в целом, (по величине критерия близости).

 Примечание: Задача аппроксимации, таким образом, выполняется дважды. В обоих случаях необходимо привести выводы всех расчётных формул и алгоритм расчёта, а не просто результат по готовому пакету программ.

 **2.2 Решение**

Зачётная книжка № Д-12091; N10 = 91/10 остаток 1

 **2.2.1 Исходные данные из предыдущей задачи**

*f(x) =* x + 10sin(x+1); интервал [-10;5/4]

**Таблица 3 – исходные данные**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер узла | Значение аргумента, x | Значение функции, f(x) |
| 0 | -10 | -14.1212 |
| 1 | -7 | -4,20585 |
| 2 | -4,5 | -0,99217 |
| 3 | -1.5 | -6,294 |
| 4 | 1,25 | 9,030732 |

 **2.2.2 Определение аппроксимирующей функции при помощи метода наименьших квадратов для равных весовых коэффициентов**

 В общем случае квадратичный критерий близости равен:

; (1)

; (2)

где - заданные табличные значения функции;

 - расчетные значения по аппроксимирующей функции;

  - весовые коэффициенты, учитывающие относительную важность *i*-й

 точки.

 В качестве аппроксимирующего уравнения выбираем уравнение второго порядка с n =5:

; (3)

 В качестве критерия близости – критерий (1).

 Из математического условия минимума функции *R*, после постановки уравнения (3) в выражение (1) принимает вид:

; (4)

 *R* = *f*(*d0; d1; d2*) – является равенством 0, частных производных этой функции.

  - математическое условие. (5)

 Из решения системы (5) находим коэффициенты *d0; d1; d2*.

  ⇒ 

 После преобразования (сокращения на два, раскрытия скобок, изменения порядка суммирования) получим:

 ⇒(6)

= 5*d*0;

= -10 – 7 - 4,5 - 1,5 + 1,25 = -21,75

= (-10)2 + (-7)2 + (-4,5)2 + (-1,5)2 +1,252 = 173,0625

= (-10)3 + (-7)3 + (-4,5)3 + (-1,5)3 +1,253 = -1435,547

= (-10)4 + (-7)4 + (-4,5)4 + (-1,5)4 +1,254 = 12818,566

= -14,1212 - 4,20585 - 0,99217 - 6,294 + 9,030732 = -16,58

= -14,1212⋅(-10)+(- 4,20585)⋅(-7)+(- 0,99217)⋅(-4,5)+(- 6,294)⋅(-1,5) +

+ 9,030732⋅1,25 =195,84713

= -14,1212⋅(-10)2+(- 4,20585)⋅(-7)2+(- 0,99217)⋅(-4,5)2+(- 6,294)⋅(-1,5)2+

 + 9,030732⋅1,252 = -1638,3

 С учётом полученных данных система (6) принимает вид:

 (7)

 Из системы уравнений (7) находим:

*d*0 = 3,589, *d*1 = 1,697, *d*2 = 0,0138.

 Аппроксимирующий полином второго порядка при равенстве весовых коэффициентов имеет вид:

у = 0,014х2 + 1,698x + 3,59.

 Составим таблицу, в которую запишем как расчётные у, так и значения f(x).

**Таблица 4 – Значения *f(x)*, *y*расч при равных коэффициентах.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x* | *f(x)* | *y*расч |
| -10 | -14,1212 | -11,99 |
| - 7 | -4,20585 | -7,61 |
| - 4,5 | -0,99217 | -3,7675 |
| - 1,5 | -6,294 | 1,0745 |
| 1,25 | 9,030732 | 5,734375 |

 Квадратичный критерий близости:

= (-14,1212+11,99)2+(-4,20585+7,61)2+(-0,99217+3,7675)2+

+(-6,294-1,0745)2+(9,030732-5,734375) = 88,99721

 Среднеквадратичная погрешность аппроксимации:

 = 4.218939

 **2.2.3 Определение аппроксимирующей функции при помощи метода наименьших квадратов при неравных весовых коэффициентах**

b1= b2= b4 =b5=1; b3=3

 (8)

= 1 + 1 + 3 + 1 + 1 = 7

= -10 – 7 + 3⋅(-4,5) - 1,5 + 1,25 = -30,75

= (-10)2 + (-7)2 + 3⋅(-4,5)2 - (1,5)2 + 1,252 = 213,5625

= (-10)3 + (-7)3 + 3⋅(-4,5)3 - (1,5)3 + 1,253= -1617,797

= (-10)4 + (-7)4 + 3⋅(-4,5)4 - (1,5)4 + 1,254 = 13638,69

= -14,1212 - 4,20585 +3⋅(- 0,99217) - 6,294 + 9,030732 = -18,567

= -14,1212⋅(-10)+(- 4,20585)⋅(-7)+3⋅(- 0,99217)⋅(-4,5)+(- 6,294)⋅(-1,5)+

+ 9,030732⋅1,25 = 204,7768

=-14,1212⋅(-10)2+(-4,20585)⋅(-7)2+3⋅(-0,99217)⋅(-4,5)2+(-6,294)⋅(1,5)2 + +9,030732⋅1,252 = -16,78,5

 С учётом полученных данных система (8) принимает вид:

 (9)

 Из системы уравнений (9) находим:

*d*0 = 3,97, *d*1 = 1,2549, *d*2 = -0,036.

 Аппроксимирующий полином второго порядка при равенстве весовых коэффициентов имеет вид:

у = 0,036х2 + 1,2549x + 3,97.

 Составим таблицу, в которую запишем как расчётные у, так и значения f(x).

**Таблица 5 – Значения *f(x)*, *y*расч при неравных коэффициентах.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x* | *f(x)* | *y*расч |
| -10 | -14,1212 | -12,179 |
| - 7 | -4,20585 | -6,593 |
| - 4,5 | -0,99217 | -2,40425 |
| - 1,5 | -6,294 | 2,01175 |
| 1,25 | 9,030732 | 5,4746875 |

 Квадратичный критерий близости:

= (-14,1212+12,179)2+(-4,20585+6,593)2+(-0,99217+2,40425)2+

+(-6,294-2,01175)2+(9,030732-5,4746875) = 93,09975

 Среднеквадратичная погрешность аппроксимации:

 = 4.315084

 **2.2.4 Построение графиков при помощи среды Excel 2013**

**Рис.2 - Графики аппроксимирующих полиномов и исходной функции.**

*f(x)* – исходная функция; *Yrk(x)* – расчетная аппроксимирующая функция с равными весовыми коэффициентами; *Ynrk(x)* – расчетная аппроксимирующая функция с неравными весовымикоэффициентами.

 **2.2.5 Расчетные значения аппроксимирующей функции третьей точке равной -4,5**

 Расчетные значениядля равных коэффициентов:

*y*расч(-4.5) = 0.14⋅(-4.5)2+1.698⋅(-4.5)+3.59 = -3.7675

 Расчетные значениядля неравных коэффициентов:

*y*расч(-4.5) = 0.036⋅(-4.5)2+1.2549⋅(-4.5)+3.97 = -2.40425

 Расчетные значениядля исходной функции:

*y*(-4.5) = -4.5 + 10sin(-4.5+1) = -0.99217

 **2.2.6 Вывод**

 Сравнивая расчетные значения аппроксимирующих функций в третьей точке *x* = -4,5 и построенных графиков функций (рисунок 2), можно сделать вывод, что аппроксимирующий полином с весовым коэффициентом 3 при точке х = -4,5 более точно описывает исходную функцию в окрестности этой точки. Однако повышение точности в одной точке вызывает увеличение среднеквадратической погрешности, а также величину квадратичного критерия близости, что связано с ухудшением аппроксимации в остальных точках.

**ЗАДАНИЕ 3**

 **3.1 Условие**

 Дано уравнение f(х) = 0. Отделить корни в интервале [а, b] и уточнить один из них (любой на выбор) заданным методом. Разработать блок-схему алгоритма используемого метода. Результаты представить в виде таблицы

(**i -** хi - f(хi)), и графиков в координатах хi - f(хi), где i – номер шага (итерации).

 Отделение корней произвести аналитическим или графическим методом, если аналитический метод окажется затруднительным. Уточнение корней произвести одним методом. Метод уточнения корней выбрать по числу N6+1 из общего списка методов. Погрешность решения принять равной:  = 0.01.

 **3.2 Решение**

Зачётная книжка № Д-12091

N10 = 91/10 остаток 1; N6 = 91/6 = 15(остаток 1); N6 + 1 = 1+1 = 2

 **3.2.1 Исходные данные**

*f(x) =* x + 10sin(x+1); интервал [-10;5]

 Уточнение корней производим методом деления отрезка пополам.

 **3.2.2 Определение корней функции на интервале [-10;5]** **графическим методом**

**Рис.3 -** **Определение корней функции графическим методом.**

 У функции *f(x) =* x + 10sin(x+1) на отрезке [-10;5] имеется пять корней:

*х1* ≈ -6,56678; *х2* ≈ -62208; *х3* ≈ -0,908977*; х4*≈ 2,3821; *х5* ≈ 4,78432

 **3.2.3 Уточнение корней методом деления отрезка пополам**

 Выберем корень *х*4 расположенный на интервале [2,3], который уточнимметодом деления отрезка пополам с погрешностью *ε* = 0,01.

 Метод методом деления отрезка пополам заключается в следующем:

 Вычисляем *f*(a), определяем половину отрезка *х* = (a+b)/2 и вычисляем *f(х).*

Проверяем следующие условия:

1. Если *f(х)⋅ f(a)* < 0, то корень лежит в интервале [*a,х*].
2. Если *f(х)⋅ f(a)* > 0, то корень лежит в интервале [*х*,b].
3. Если b-a < *ε*, то *х* является корнем

 Шаг1.

 Находим середину отрезка [2; 3]:

*f*(а) = 3,4112

*х* = (2 + 3)/2 = 2,5

*f(x)* = -1,00783

Поскольку *f*(а)*⋅ f(x)* < 0, то *х=* b = 2,5

 Шаг 2.

 Находим середину отрезка [2; 2,5]:

*f*(а) = 3,4112

*х* = (2 + 2,5)/2 = 2,25

*f(x)* = 1,168049

Поскольку *f*(а)*⋅ f(x)* > 0, то *х=* а = 2,25

Шаг 3.

 Находим середину отрезка [2,25; 2,5]:

*f*(а) = 1,168049

*x* = (2,25 + 2,5)/2 = 2,375

*f(x)* = 0,062062

Поскольку *f*(а)⋅*f(x)* > 0, то *х* = а = 2,375

 Шаг 4.

 Находим середину отрезка [2,375; 2,5]:

*f*(а) =0,062062

*x* = (2,375 + 2,25)/2 = 2,4375

*f(x)* = -0,47858

Поскольку *f*(а)⋅*f(x*) < 0, то *х* = b = 2,4375

 Шаг 5.

 Находим середину отрезка [2,375;2,4375]:

*f*(а) =0,062062

*x*= (2,375 + 2,4375)/2 = 2.40625

*f(x)* = -0.20954

 Поскольку *f*(a)⋅*f(x)* < 0, то *х* = b = 2,40625

 Шаг 6.

 Находим середину отрезка [2,375;2,40625]:

*f*(а) =0,062062

*x*= (2,375 + 2,40625)/2 = 2.390625

*f(x)* = -0.07404; *f*(a)⋅*f(x)* < 0, то *х* = b = 2,390625

 Шаг 7.

 Находим середину отрезка [2,375;2,390625]:

*f*(а) =0,062062

*x*= (2,375 + 2,390625)/2 = 2.382813

*f(x)* = -0.00606; *f*(a)⋅*f(x)* < 0, то *х* = b = 2,382813

Шаг 8.

 Находим середину отрезка [2,375;2,382813]:

*f*(а) =0,062062

*x*= (2,375 + 2,382813)/2 = 2.378907

*f(x)* = 0.02798; *f*(a)⋅*f(x)* > 0, то *х* = a = 2,378907

Шаг 9.

 Находим середину отрезка [2,378907;2,382813]:

*f*(а) =0,02798

*x*= (2,378907 + 2,382813)/2 = 2.38086

*f(x)* = 0.010951; *f*(a)⋅*f(x)* > 0, то *х* = a = 2,38086

Шаг 10.

 Находим середину отрезка [2,38086;2,382813]:

*f*(а) =0,02798

*x*= (2,378907 + 2,382813)/2 = 2,381837; *f(x)* = *f*(a)⋅*f(x)* > 0, то *х* = a = 2,381837

 Так как b – a = 2,382813 - 2,38086 = 0,002441734 < 0.01, то *х =* 2,381837является корнем с погрешностью *ε* = 0,01.

 **3.2.4 Полученные результаты представим в виде таблицы (*i - хi - f(хi)*) и графиков в координатах *хi - f(хi),* где *i* – номер шага (итерации)**

**Таблица 6 – Уточнение корней методом деления отрезка пополам.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *i* | *xi* | *f(xi)* |
| 1 | 2,5 | -1,00783 |
| 2 | 2,25 | 1,168049 |
| 3 | 2,375 | 0,062062 |
| 4 | 2,4375 | -0,47858 |
| 5 | 2,40625 | -0,20954 |
| 6 | 2,390625 | -0,07404 |
| 7 | 2,382813 | -0,00606 |
| 8 | 2,378907 | 0,02798 |
| 9 | 2,38086 | 0,010951 |

**Рис.4 - График уточнение корней методом деления отрезка пополам.**

 **3.2.5 Построение блок-схемы алгоритма уточнение корней методом деления отрезка пополам**



 **3.2.5 Вывод**

*х*граф.знач.≈ 2,3821; *f*(2,3821) = 0,000145994

*xi* = 2,381837; *f*(*xi*) = 0,001953. Количество шагов, *i* = 10

 Найденные значения  *xi* методом деления отрезка пополам с погрешность

*ε* = 0,01 соответсвуют значению корня функции *f(x) =* x + 10sin(x+1) на отрезке [2; 3].

**ЗАДАНИЕ 4**

 **4.1 Условие**

По заданной функции f(х) в заданном интервале рассчитать интеграл  заданным методом (интервал [а, b] разбить не менее чем на шесть подынтервалов). Метод численного интегрирования выбрать по числу N4+1 из следующего общего списка методов:

1. Простейшие методы
2. Метод Симпсона
3. Метод Ньютона-Котеса
4. Методы Чебышева и Гаусса

 **4.2 Решение**

Зачётная книжка № Д-12091

N10 = 91/10 остаток 1; N4 = 91/4 = 22(остаток 3); N4+1 = 3+1 = 4

 **4.2.1 Исходные данные**

*f(x) =* x + 10sin(x+1); интервал [-10;5]

Методы Чебышева и Гаусса .

 **4.2.2 Рассчитаем интеграл методом Чебышева**

 Разделим интервал [-10; 5] на 10 подынтервалов.Шаг интегрирования будет равен:

h =

где: *k* примем равное 4

h = = 1.5

 Так как шаг у нас одинаковый, то весовые коэффициенты для всех подынтервалов будут одинаковыми. Высчитаем для первого подынтервала [-10;-8.5] :

w1= = = 0.375

 Следовательно для всех подынтервалов.

 Интеграл для i – подынтервала:

*I=wi⋅*

 *хi* высчитывается по формуле: .

где *Zi* при *k* = 4 будут равны:

*Z1=* -0,794654; *Z2=* -0,187592*; Z3=* 0,187592; *Z4 =* 0,794654*.*

 Найдем значения интеграла на интервале [-10;-8.5]:

*х1* = (-10+(-8,5))/2+(-8,5-(-10)/2⋅(-0,794654) = -9,84599

*х2* = -9,25 + 0,75⋅(-0,187592) = -9,39069

*х3* = -9,25 + 0,75⋅0,187592 = -9,10931

*х4* = -9,25 + 0,75⋅0,794654 = -8,65401

*I1* = *Zi* ⋅(*f(x1)* + *f(x2)+ f(x3)+ f(x4)*) = 0.375⋅(-15.3161 -17.9846 -18.7851 - 26.4527) =

= -26.4527

 Найдем значения интеграла на интервале [-8.5;-7]:

*х1* = -7,75+0,75⋅(-0,794654) = -8,34599

*х2* = -7,75 + 0,75⋅(-0,187592) = -7,89069

*х3* = -7,75 + 0,75⋅0,187592 = -7,60931

*х4* = -7,75 + 0,75⋅0,794654 = -7,15401

*I2* = 0,375⋅(-17,0,832-13,5989-10,813-5,86587) = -17,7604

 Найдем значения интеграла на интервале [-7;-5,5]:

*х1* = -6,25+0,75⋅(-0,794654) = -6,84599

*х2* = -6,25 + 0,75⋅(-0,187592) = -6,3906

*х3* = -6,25 + 0,75⋅0,187592 = -6,10931

*х4* = -6,25 + 0,75⋅0,794654 = -5,65401

*I3* = 0,375⋅(-2,61199 + 1,39568 + 3,113259 + 4,32895) = 2,334712

 Найдем значения интеграла на интервале [-5,5;-4]:

*х1* = -4,75+0,75⋅(-0,794654) = -5,34599

*х2* = -4,75 + 0,75⋅(-0,187592) = -4,89069

*х3* = -4,75 + 0,75⋅0,187592 = -4,60931

*х4* = -4,75 + 0,75⋅0,794654 = -4,15401

*I4* = 0,375⋅(3,990246 +1,919116 – 0,10083 - 4,02982) = 0,667018

Найдем значения интеграла на интервале [-4;-2,5]:

*х1* = -3,25+0,75⋅(-0,794654) = -3,84599

*х2* = -3,25 + 0,75⋅(-0,187592) = -3,39069

*х3* = -3,25 + 0,75⋅0,187592 = -3,10931

*х4* = -3,25 + 0,75⋅0,794654 = -2,65401

*I5* = 0,375⋅(-6,75915 -10,2137 – 11,694 - -12,6194) = -15,4823

 Найдем значения интеграла на интервале [-2,5;-1]:

*х1* = -1,75+0,75⋅(-0,794654) = -2,34599

*х2* = -1,75 + 0,75⋅(-0,187592) = -1,89069

*х3* = -1,75 + 0,75⋅0,187592 = -1,60931

*х4* = -1,75 + 0,75⋅0,794654 = -1,15401

*I6* = 0,375⋅(-12,0944 – 9,66578 – 7,3323 – 2,68806) = -11,9177

 Найдем значения интеграла на интервале [-1; 0,5]:

*х1* = -0,25+0,75⋅(-0,794654) = -0,84599

*х2* = -0,25 + 0,75⋅(-0,187592) = -0,39069

*х3* = -0,25 + 0,75⋅0,187592 = -0,10931

*х4* = -0,25 + 0,75⋅0,794654 = 0,345988

*I7* = 0,375⋅(0,688023 + 5,332291 + 7,665767 + 10,09435) = 8,917664

 Найдем значения интеграла на интервале [0,5; 2,5]:

*х1* = 1,25+0,75⋅(-0,794654) = 0,65401

*х2* = 1,25 + 0,75⋅(-0,187592) = 1,109306

*х3* = 1,25 + 0,75⋅0,187592 = 1,390693

*х4* = 1,25 + 0,75⋅0,794654 = 1,845988

*I8* = 0,375⋅(10,61941 + 9,694046 + 8,213664 + 12,48236) = 12,48236

 Найдем значения интеграла на интервале [2,5; 3,5]:

*х1* = 2,75+0,75⋅(-0,794654) = 2,15401

*х2* = 2,75 + 0,75⋅(-0,187592) = 2,609306

*х3* = 2,75 + 0,75⋅0,187592 = 2,890693

*х4* = 2,75 + 0,75⋅0,794654 = 3,345988

*I9* = 0,375⋅(2,029844 – 1,89916 – 3,91911 – 5,99024) = -3,667

 Найдем значения интеграла на интервале [0,5; 2,5]:

*х1* = 4,25+0,75⋅(-0,794654) = 3,65401

*х2* = 4,25 + 0,75⋅(-0,187592) = 4,109306

*х3* = 4,25 + 0,75⋅0,187592 = 4,390693

*х4* = 4,25 + 0,75⋅0,794654 = 4,845988

*I10* = 0,375⋅(-6,32895 – 5,11327 – 3,39569 + 0,61962) = -5,33473

 Общий интеграл для функции *f(x) =* x + 10sin(x+1) на отрезке [-10; 5] будет равен сумме всех интегралов для подынтервалов:

*Iобщ=*= *I1* + *I2*+ *I3*+ *I4*+ *I5*+ *I6*+ *I7*+ *I8*+ *I9*+ *I10* = -26,4527 –17,7604 +2,334712 + +0,667018- 15,4823 – 11,9177 + 8,917664 + 12,48236 – 3,667 – 5,33473 = -56,2131

 **4.2.2 Рассчитаем интеграл методом Гаусса**

 В методе Гаусса интеграл для i – подынтервала будет вычисляться по

формуле:

*I=⋅*

 *хi* вычисляется также как в методе Чебышева:

.

 Но *wi* будет зависеть от значения *k* и *Zi* будет равно вметоде Чебышева

 Значения *wi* и *Zi* при *k* =4:

*-Z1 = Z4* = 0,861136; *-Z2 = Z3=0,33998*;

*w1 = w4 =* 0,3447855*; w2 = w3* = 0,652145.

 Найдем значения интеграла на интервале [-10;-8.5]:

*х1* = -9,25+0,75⋅(-0,861136) = -9,89585

*х2* = -9,25 + 0,75⋅(-0,339981) = -9,50499

*х3* = -9,25 + 0,75⋅0,339981 = -8,99501

*х4* = -9,25 + 0,75⋅0,861136 = -8,60415

*I1* = 0,75⋅(0,347855⋅(-14,9419) + 0,625145⋅(–17,4597) + 0,625145⋅(–18,8957) +

+ 0,347855⋅(-18,2937)) = -26,4527

 Найдем значения интеграла на интервале [-8.5;-7]:

*х1* = -7,75+0,75⋅(-0,861136) = -8,39585

*х2* = -7,75 + 0,75⋅(-0,339981) = -8,00499

*х3* = -7,75 + 0,75⋅0,339981 = -7,49501

*х4* = -7,75 + 0,75⋅0,861136 = -7,10415

*I2* = 0,75⋅(0,347855⋅(-17,3647) + 0,625145⋅(–14,6124) + 0,625145⋅(–9,5975) +

+ 0,347855⋅(-5,32332)) = -17,7603

 Найдем значения интеграла на интервале [-7;-5,5]:

*х1* = -6,25+0,75⋅(-0,861136) = -6,89585

*х2* = -6,25 + 0,75⋅(-0,339981) = -6,50499

*х3* = -6,25 + 0,75⋅0,339981 = -5,99501

*х4* = -6,25 + 0,75⋅0,861136 = -5,60415

*I3* = 0,75⋅(0,347855⋅(-3,11865) + 0,625145⋅0,514997 + 0,625145⋅3,608252 +

+ 0,347855⋅4,337329) = 2,334661

 Найдем значения интеграла на интервале [-5.5;-4]:

*х1* = -4,75+0,75⋅(-0,861136) = -5,39585

*х2* = -4,75 + 0,75⋅(-0,339981) = -5,00499

*х3* = -4,75 + 0,75⋅0,339981 = -4,49501

*х4* = -4,75 + 0,75⋅0,861136 = -4,10415

*I4* = 0,75⋅(0,347855⋅4,107339 + 0,625145⋅2,595534 + 0,625145⋅(-1,03391) +

+ 0,347855⋅(-4,47851)) = 0,666967

 Найдем значения интеграла на интервале [-4;-2,5]:

*х1* = -3,25+0,75⋅(-0,861136) = -3,89585

*х2* = -3,25 + 0,75⋅(-0,339981) = -3,50499

*х3* = -3,25 + 0,75⋅0,339981 = -2,99501

*х4* = -3,25 + 0,75⋅0,861136 = -2,60415

*I5* = 0,75⋅(0,347855⋅(-6,3286) + 0,625145⋅(-9,44969) + 0,625145⋅(-12,1086) +

+ 0,347855⋅(-12,5986)) = -15,4823

 Найдем значения интеграла на интервале [-2,5;-1]:

*х1* = -1,75+0,75⋅(-0,861136) = -2,39585

*х2* = -1,75 + 0,75⋅(-0,339981) = -2,00499

*х3* = -1,75 + 0,75⋅0,339981 = -1,49501

*х4* = -1,75 + 0,75⋅0,861136 = -1,10415

*I6* = 0,75⋅(0,347855⋅(-12,2432) + 0,625145⋅(-10,4465) + 0,625145⋅(-6,24546) +

+ 0,347855⋅(-2,14375)) = -11,9176

 Найдем значения интеграла на интервале [-1; 0,5]:

*х1* = -0,25+0,75⋅(-0,861136) = -0,89589

*х2* = -0,25 + 0,75⋅(-0,339981) = -0,50499

*х3* = -0,25 + 0,75⋅0,339981 = 0,004986

*х4* = -0,25 + 0,75⋅0,861136 = 0,39852

*I7* = 0,75⋅(0,347855⋅0,143746 + 0,625145⋅4,245456 + 0,625145⋅8,446529 +

+ 0,347855⋅10,24321) = 8,917628

 Найдем значения интеграла на интервале [0,5; 2]:

*х1* = 1,25+0,75⋅(-0,861136) = 0,604148

*х2* = 1,25 + 0,75⋅(-0,339981) = 0,995014

*х3* = 1,25 + 0,75⋅0,339981 = 1,504986

*х4* = 1,25 + 0,75⋅0,861136 = 1,89852

*I8* = 0,75⋅(0,347855⋅10,59859 + 0,625145⋅10,10862 + 0,625145⋅7,44969 +

+ 0,347855⋅4,3286) = 12,4823

 Найдем значения интеграла на интервале [2; 3,5]:

*х1* = 2,75+0,75⋅(-0,861136) = 2,104148

*х2* = 2,75 + 0,75⋅(-0,339981) = 2,495014

*х3* = 2,75 + 0,75⋅0,339981 = 3,004986

*х4* = 2,75 + 0,75⋅0,861136 = 3,39852

*I9* = 0,75⋅(0,347855⋅2,478507 + 0,625145⋅(-0,96609) + 0,625145⋅(-4,59553) +

+ 0,347855⋅(-6,10734)) = -3,66697

 Найдем значения интеграла на интервале [3,5; 5]:

*х1* = 4,25+0,75⋅(-0,861136) = 3,604148

*х2* = 4,25 + 0,75⋅(-0,339981) = 3,995014

*х3* = 4,25 + 0,75⋅0,339981 = 4,504986

*х4* = 4,25 + 0,75⋅0,861136 = 4,89852

*I10* = 0,75⋅(0,347855⋅(-6,33733) + 0,625145⋅(-5,60825) + 0,625145⋅(-2,515) +

+ 0,347855⋅1,118646) = -5,33466

 Общий интеграл для функции будет равен сумме всех интегралов для подынтервалов:

*Iобщ=*= *I1* + *I2*+ *I3*+ *I4*+ *I5*+ *I6*+ *I7*+ *I8*+ *I9*+ *I10* = -26,4527 –17,7603 +2,334661 + + 0,666967 - 15,4823 – 11,9176 + 8,917628 + 12,4823 – 3,66697 – 5,33466 =

= -56,2130

**4.2.4 Вывод**

 Общий интеграл для функции *f(x) =* x + 10sin(x+1) на отрезке [-10; 5] равен:

 По методу Чебышева:

-56,2131

 По методу Гаусса:

-56,2130

 Мы видим, что интегралы для функции высчитанные по методам Чебышева и Гаусса отличаются на одну десятитысячную. Это объясняется тем, что в методе Гаусса весовые коэффициенты различные, поэтому он более точный.

**ЗАДАНИЕ 5**

 **5.1 Условие**

 Задана система нелинейных уравнений:

f1(x1,x2) = 0,

f2(x1,x2) = 0.

 Уравнения системы выбираются изтаблицы № 2 в зави­симости от числа N10. Требуется решить эту систему заданным в соответствии с номером варианта методом. Метод выбрать по числу N2+1 из следующего списка:

1. Метод Ньютона-Рафсона
2. Метод итераций.

 **5.2 Решение**

Зачётная книжка № Д-12091

N10 = 91/10 остаток 1; N2 = 91/2 = 45(остаток 1); N4+1 = 1+1 = 2

 **5.2.1 Исходные данные**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *N10* | *f1(x1,x2)* | *f2(x1,x2)* |
| 1 | *x*1-cos*x*2 = 3 | sin*x*1 + 2*x*2 = 2 |

Метод итераций.

 **5.2.2 Решение системы уравнений методом итераций**

 Систему уравнений:

 Приведём к следующему виду:

 В качестве начальных условий принимаем х1 = 1 и х2 = 0,25.

 Проверим выполнения условий сходимости:

 = 0, = -sin*x*2, = -0,5cos*x*2, = 0,

 Условия сходимости будут выполнятся всегда:

 + = -0,5cos*x*2 < 0

 + = -sin*x*2 < 0

 Далее будем подставлять значения *х* в функции, постепенно приближаясь к истинным значениям. Зададимся погрешностью *ε* = 0,01.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| i | *x*1 | *x*2 |
| cos*x2* + 3 | (2 – sin*x*1)/2 |
| 1 | cos(0,25)+ 3 = 3,968912 | (2-sin(3,968912))/2=1,36806 |
| 2 | cos(1,36806)+ 3 = 3,20135 | (2-sin(3,20135))/2=1,029861 |
| 3 | cos(1,029861)+ 3 =3,514938 | (2-sin(3,514938))/2=1,182366 |
| 4 | cos(1,182366)+ 3 =3,378736 | (2-sin(3,378736))/2=1,117463 |
| 5 | cos(1,117463)+ 3 =3,437964 | (2-sin(3,437964))/2=1,146026 |
| 6 | сos(1,146026)+ 3 =3,412112 | (2-sin(3,412112))/2=1,133616 |

*х*16 - *х*15 = 3,412112 - 3,437964 = -0,02585 < 0,01

*х*26 – *х*25 = 1,133616 - 1,146026 = -0,01241 < 0,01

 **5.2.3 Вывод**

 Значения *х*16 и *х*26 удовлетворяют условиям: | *х*1,i - *х*1,i+1| < *ε* , | *х*2,i – *х*2,i+1| < *ε*, следовательно корнями уравнения системы:

будут являться:

*х*1 = 3,412112 и *х*2 = 1,133616; i = 6

 Сделаем проверку:

3,412112 – cos(1,133616) = 2.988725 ≈3

sin(1,133616) +2⋅3,412112 = 2

 Вычисления произведены верно.

# **Задание 6**

Исходные данные: N4=3, N10=9; Nд=3 – следовательно, n=7.

Заданный полином в общем виде:

Р7(х)= а0х7+а1х6+а2х5+а3х4+а4х3+а5х2+а6х+а7=0

Коэффициенты полинома возьмём из таблицы 25.

Таблица 25

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N10 | a0 | a1 | a2 | a3 | a4 | a5 | a6 | a7 |
| 9 | 4 | 6 | -2 | -5 | 8 | -8 | -4 | 4 |

Исходный полином имеет вид:

Р7(х)= 4х7+6х6-2х5-5х4+8х3-8х2-4х+4=0

# **6.1 Общее количество корней**

Так как данный полином седьмой степени, то общее количество его корней равно семи.

# **6.2 Количество положительных и отрицательных корней**

Воспользуемся правилом Декарта для определения количества положительных и отрицательных корней:

Число положительных корней:

Р7(х) = 4х7+6х6-2х5-5х4+8х3-8х2-4х+4=0

Число перемен знаков коэффициентов: + + – – + – – +.

Знак меняется 4 раза, следовательно, положительных корней либо 4, либо 2, либо 0.

Число отрицательных корней:

Р7(-х) = -4х7+6х6+2х5-5х4-8х3-8х2+4х+4=0

Число перемен знаков коэффициентов: – + + – – – + +.

Знак меняется 3 раза, следовательно, отрицательных корней либо 3, либо 1.

# **6.3 Предельные оценки и область существования корней**

Для нахождения требуемых величин воспользуемся методом предельных значений.

Вычисляем верхние границы положительных корней Ri:

1) Для полинома Рn(х):

4х7+6х6-2х5-5х4+8х3-8х2-4х+4=0

Воспользуемся формулой:

,

где m – номер первого по порядку отрицательного коэффициента в полиноме в левой части уравнения Рn(х);

 В – наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов Рn(х) при этом предполагается, что а0>0.

2) Для полинома Рn(-х):

-4х7+6х6+2х5-5х4-8х3-8х2+4х+4=0

Так как а0<0, то сначала умножим обе части уравнения на -1:

4х7-6х6-2х5+5х4+8х3+8х2-4х-4=0

3) Для полинома хnРn(1/х):

4+6х-2х2-5х3-8х4-8х5-4х6+4х7=0

4) Для полинома хnРn(-1/х):

-4+6х+2х2-5х3-8х4-8х5+4х6+4х7=0 – умножаем уравнение на (-1)

4-6х-2х2+5х3+8х4+8х5-4х6-4х7=0

Если действительные корни существуют, то они лежат в интервалах

(-R2; -1/R4) и (1/R3; R1), т.е. в интервалах (-2.5; -0.4) и (0.414; 2.414).

# **6.4 Выделение одного действи­тельного корня**

Начальное приближение примем равным х0=-2.2

Общий вид формулы, по которой будем производить вычисления:

Конкретизированная под наш полином итерационная формула:

Значения корня на каждой итерации запишем в виде таблицы 26.

Таблица 26

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| i | xi | xi+1 |
| 0 | -2.2 |  0.01840 |
| 1 |  0.01840 |  -0.96514 |
| 2 | -0.96514 |  0.32946 |
| 3 |  0.32946 | -0.67326 |
| 4 | -0.67326 |  0.70550 |
| 5 |  0.70550 | -0.62780 |
| 6 | -0.62780 |  0.84004 |
| 7 |  0.84004 | -0.78134 |
| 8 | -0.78134 |  0.50396 |
| 9 |  0.50396 | -0.61460 |
| 10 | -0.61460 |  0.88819 |
| 11 |  0.88819 | -0.93849 |
| 12 | -0.93849 |  0.34782 |
| 13 |  0.34782 | -0.66481 |
| 14 | -0.66481 |  0.72742 |
| 15 |  0.72742 | -0.63937 |
| 16 | -0.63937 |  0.80157 |
| 17 |  0.80157 | -0.71089 |
| 18 | -0.71089 |  0.62088 |
| 19 |  0.62088 | -0.60658 |
| 20 | -0.60658 |  0.91998 |

Вывод: получили расходящийся итерационный процесс. Необходимо либо повторить поиск корня из другого начального приближения, либо использовать другие методы.

Решение данного уравнения с помощью программы MathCAD даёт 3 вещественных корня: x1=-0.682603; x2=0.605672; x3=0.871536. График полинома изображён на рисунке 8. Из графика видно, что начальное приближение было выбрано неудачно (достаточно далеко от каждого корня).



**ЗАДАНИЕ 7**

 **7.1 Условие**

 Решить дифференциальное уравнение *у'* = *f*(*х*) + *ху* при за­данных начальных условиях *хо* = а, *у*(*хо*)= *у*(а) = 0 в заданных пределах [a, b] с шагом не менее (b - а)/ 10двумя методами:

1. Методами Эйлера
2. Методом Рунге-Кутта

 Итогом решения задачи должно быть построение графика полученной функции *у* = *f*(*х*) (минимум по 5-и точкам).

 **7.2 Решение**

Зачётная книжка № Д-12091; N10 = 91/10 остаток 1.

 **7.2.1 Исходные данные**

*f(x) =* *x* + 10sin(*x*+1); интервал [-10;5]

*хо* = -10, *у*(*хо*)= *у*(*а*) = 0; *h* = (5 – (-10))/ 10 = 1,5

 **7.2.2 Решение дифференциального уравнения методами Эйлера**

*у*' = *x* + 10sin(*x*+1) + *ху*;

 **7.2.2.1 Метод Эйлера**

 В общем случае метод Эйлера заключается в нахождении *yi*+1 по формуле:



 Для данного задания можно переписать как:

*yi+*1 = *yi* + 1.5 ⋅(*х* +10sin(*x +* 1) + *xi yi*)

 Первый и последующие шаги:

*y*1 = 0 + 1.5 ⋅(-10 +10sin(*-*10 *+* 1) + (-10) ⋅ 0) = -21,182

*y*2 = -21,182 + 1.5 ⋅(-8,5 +10sin(*-*8,5 *+* 1) + (-8,5) ⋅ (-21,182) = 222,066

*y*3 = 222,066 + 1.5 ⋅(-7 +10sin(*-*7 *+* 1) + (-7) ⋅ 222,066 = -2115,935

*y*4 = -2115,935 + 1.5 ⋅(-5,5 +10sin(*-*5,5 *+* 1) + (-5,5) ⋅ (-2115,935) = 15346.939

*y*5 = 15346,939 + 1.5 ⋅(-4 +10sin(*-*4 *+* 1) + (-4) ⋅15346,939 = -76742,813

*y*6 = -76742,813+ 1.5 ⋅(-2,5 +10sin(*-*2,5 *+* 1) + (-2,5) ⋅ (-76742,813) = 211024,023

*y*7 = 211024,023+1.5 ⋅(-1 +10sin(*-*1 *+* 1) + (-1) ⋅ 211024,023 = -105513,512

*y*8 = -105513,512+1.5 ⋅(0,5 +10sin(0,5 *+* 1) + 0,5 ⋅(-105513,512) = -184632,933

*y*9 = -184632,933 +1.5 ⋅(2 +10sin(2 *+* 1) + 2 ⋅(-184632,933) = -738526,615

*y*10 = -738526,615+1.5 ⋅(3,5 +10sin(3,5 *+* 1) + 3,5⋅(-738526,615) = -4615800,756

 **7.2.2.2 Модифицированный метод Эйлера**

В общем случае модифицированный метод Эйлера заключается в нахождении *yi*+1 по формуле:

*yi*+1 = *yi*+ 0.5*h* ⋅ [*f* (*x*i,*y*i)+ *f* (*x*i+1,*y*i+1)]

где: *yi*+1 – значение найденное по методу Эйлера.

 *xi*+1 = *x* + *h*

 Первое и последующие шаги:

*y*1 = *y*0 + 0.5*h* ⋅ [*f* (*x*0,*y*0)+ *f* (*x*1,*y*1)] = 0 + 0,75⋅[(-10 +10sin(*-*10 *+* 1) + (-10)⋅0) +

+(-8,5+10sin(-8,5+1)+(-8,5)⋅(-21,182))] = 111,033

*y*2=*y*1+0.5*h*⋅[*f*(*x*1,*y*1)+*f*(*x*2,*y*2)]=111,033+0,75⋅[(-8,5+10sin(*-*8,5*+*1)+(-8,5)⋅111,033)+

+ (-7+10sin(-7+1)+(-7)⋅222,066)] = -1179,212

*y*3 = -1179,212 + 0,75⋅[(-7+10sin(*-*7*+*1) + (-7)⋅(-1179,212) + (-5,5+10sin(-5,5+1) +

+ (-5,5)⋅(-2115,935))] = 16289,935

*y*4 = 16289,935+0,75⋅[(-5,5 +10sin(*-*5,5*+*1)+(-5,5)⋅16289,935) + (-4+10sin(-4+1) + + (-4)⋅ 15346,939] = -96947,716

*y*5=-96947,716+0,75⋅[(-4 +10sin(*-*4*+*1) + (-4)⋅(-96947,716))+(-2,5+10sin(-2,5+1) +

+ (-2,5)⋅(-76742,813))] = 337774,793

*y*6 = 337774,793+0,75⋅[(-2,5+10sin(*-*2,5*+*1)+(-2,5)⋅337774,793)+(-1+10sin(-1+1)+

+ (-1)⋅ 211024,023)] = -453831,067

*y*7= -453831,067+0,75⋅[(-1+10sin(*-*1*+*1)+(-1)⋅(-453831,067)) +(0,5+10sin(0,5+1)+ +0,5⋅(-105513,512))] = -153018,227

*y*8 = -153018,227+0,75⋅[(0,5+10sin(0,5*+*1) +0,5⋅(-153018,227)) + (2+10sin(2+1) + + 0,5⋅(-184632,933))] = -487339,047

*y*9 = -487339,047 +0,75⋅[(2+10sin(2*+*1) + 2⋅(- 487339,047)) + (3,5+10sin(3,5+1) + + 0,5⋅(-738526,615))] = -3156982,131

*y*10=-3156982,131+0,75⋅[(3,5+10sin(3,5*+*1)+3,5⋅(- 3156982,131))+(5+10sin(5+1)+ + 5⋅(-4615800,756))] = -28753316,109

**Рис. 5 – Графики функций построенные методами Эйлера.**

 **7.2.3 Решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта**

Вычислительный алгоритм записывается следующим образом:

*yi*+1 = *yi* +

где: *k1* = *h⋅ f* (*xi*, *yi*);

 *k2* = *h⋅ f* (*xi* + , *yi* + );

 *k3* = *h⋅ f* (*xi* + , *yi* + );

 *k4* = *h⋅ f* (*xi* + *h*, *yi* + *k3*).

 На первом шаге получим:

*k1 =* 1,5 ⋅(-10 + 10sin(-10 + 1) + (-10)⋅0) = -21,182

*k2 =* 1,5 ⋅(-10+1,5/2 + 10sin(-10+1,5/2 + 1) + (-10+1,5/2)⋅(0 - 21,182/2))= 119,235

*k3 =* 1,5 ⋅(-10+1,5/2 +10sin(-10+1,5/2+1) + (-10+1,5/2)⋅(0 + 119,235/2))=-854,904

*k4 =* 1,5 ⋅(-10 + 1,5 + 10sin(-10 + 1,5 + 1) + (-10 + 1,5)⋅(0 – 854,904))= 10873,200

*y*1 =0+(-21,182+2⋅119,235+2⋅(-854,904)+10873,2)/6 = 1563,447

 На втором шаге:

*k1 =* 1,5 ⋅(-8,5 + 10sin(-8,5+ 1) + (-8,5)⋅1563,447) = -19960,765

*k2 =* 1,5⋅(-8,5+0,75+10sin(-8,5+0,75+1)+(-8,5+0,75)⋅(1563,447–19960,765/2)) =

= 97828,505

*k3 =* 1,5 ⋅(-8,5+0,75+10sin(-8,5+0,75+1) + (-8,5+0,75)⋅(1563,447+97828,505/2)) =

= -586821,627

*k4 =* 1,5 ⋅(-7 + 10sin(-7 + 1) + (-7)⋅(1563,447 – 586821,627)) = 6145204,586

*y*2 = 1563,447+(-19960,765+2⋅97828,505 +2⋅ (-586821,627) + 6145204,586)/6 =

=859439,709

 Третий шаг:

*k1 =* 1,5 ⋅(-7 + 10sin(-7+ 1) + (-7)⋅859439,709) = -9024123,257

*k2 =* 1,5⋅(-7+0,75 +10sin(-7+0,75+1) + (-7+0,75)⋅( 859439,709–9024123,257/2)) =

= 34243334,0

*k3 =* 1,5 ⋅(-7+0,75+10sin(-7+0,75+1) + (-7+0,75)⋅( 859439,709+34243334/2)) =

= -168572871,889

*k4 =* 1,5⋅(-5,5+10sin(-5,5+1)+(-5,5)⋅(859439,71–168572871,89))=1383635821,897

*y*3 = 859439,71+(-9024123,26+2⋅34243334-2⋅168572871,89+1383635821,89)/6= = 185184876,853

 Четвёртый шаг:

*k1 =* 1,5 ⋅(-5,5 + 10sin(-5,5+ 1) + (-5,5)⋅ 185184876,853) = -1527775227,623

*k2=*1,5⋅(-4,75+10sin(-4,75+1)-4,75⋅(185184876,85-1527775227,6/2))=4123257002

*k3=*1,5⋅(-4,75+10sin(-4,75+1)-4,75⋅(185184876,8+4123257002/2))=-16008545316

*k4 =* 1,5⋅(-4+10sin(-4+1)-4⋅( 185184876,853-16008545316))=94940162631,2

*y*4 = 185184876,853 + (-1527775227,623 + 2⋅4123257002 - 2⋅160085453162 +

 + 1383635821,897)/6 = 11792153339,299

 Пятый шаг:

*k1 =* 1,5 ⋅(-4 + 10sin(-4+ 1) - 4⋅11792153339,299) = -70752920043,623

*k2 =* 1,5⋅(-3,25 + 10sin(-3,25+1) - 3,25⋅(11792153339,299 - 70752920043/2)) =

= 114973495061,406

*k3 =* 1,5⋅(-3,25+10sin(-3,25+1) - 3,25⋅(11792153339,299 +114973495061,4/2)) =

= -337734641757,807

*k4 =* 1,5⋅(-2,5 + 10sin(-2,5 + 1) - 2,5⋅(11792153339,299 - 337734641757,807)) =

= 1222284331550,69

*Y*5 =11792153339,299+(-70752920043,6+2⋅114973495061,4-2⋅337734641757,8+

+ 1222284331550,69)/6 = 129460339691,629

 Шестой шаг:

*k1 =* 1,5 ⋅(-2,5 + 10sin(-2,5+ 1) – 2,5⋅129460339691,629) = -485476273862,321

*k2 =* 1,5⋅(-1,75 + 10sin(-1,75+1) - 1,75⋅(129460339691,629-485476273862,32 /2))=

= 297354217740,92

*k3 =* 1,5⋅(-1,75+10sin(-1,75+1) - 1,75⋅(129460339691,629+297354217740,92/2)) =

= -730110802488,333

*k4=*1,5⋅(-1+10sin(-1+1)-1⋅(129460339691,62-730110802488,3))=900975694193,5

*y*6 =129460339691,6+(-485476273862,32+2⋅297354217740,9-2⋅730110802488,3+

 +900975694193,5)/6 = 54458048164,364

 Седьмой шаг:

*k1 =* 1,5 ⋅(-1 + 10sin(-1+ 1) – 1⋅54458048164,364) = -8168707722248,046

*k2 =* 1,5⋅(-0,25 + 10sin(-0,25+1) - 0,25⋅(54458048164,364-8168707722248,04/2)) =

= -5105442005,278

*k3 =* 1,5⋅(-0,25+10sin(-0,25+1) - 0,25⋅(54458048164,364-5105442005,278/2)) =

= -19464497675,797

*k4 =* 1,5⋅(0,5 + 10sin(0,5+1) + 0,5⋅(54458048164,364 - 19464497675,797)) =

= 26245162882,137

*y*7 =54458048164,364+(-8168707722248,046-2⋅5105442005,278-2⋅19464497675,7

+26245162882,137)/6 = 37027750043,021

 Восьмой шаг:

*k1 =* 1,5 ⋅(0,5 + 10sin(0,5 + 1) + 0,5⋅37027750043,021)) = 27770812547,987

*k2 =* 1,5⋅(1,25+10sin(1,25+1)+1,25⋅(37027750043,01+27770812547,98/2)) =

= 95462168107,939

*k3 =* 1,5⋅(1,25+10sin(1,25+1) + 1,25⋅(37027750043,021+95462168107,939/2)) =

= 158922813945,403

*k4 =* 1,5⋅(2 + 10sin(2 + 1) + 2⋅(37027750043,021 + 158922813945,403))=

= 587851691970,387

*y*8=37027750043,021+(27770812547,98+2⋅95462168107,9+2⋅158922813945,4+ +587851691970,387)/6 = 224426494813,862

 Девятый шаг:

*k1 =* 1,5 ⋅(2 + 10sin(2 + 1) + 2⋅224426494813,862) = 673279484446,703

*k2 =* 1,5⋅(2,75+10sin(2,75+1)+2,75⋅(224426494813,862+673279484446,703/2)) =

= 231498227774,060

*k3 =* 1,5⋅(2,75+10sin(2,75+1) + 2,75⋅(224426494813,862+231498227774,060/2)) =

= 5699205635886,730

*k4 =* 1,5⋅(3,5 + 10sin(3,5 + 1) + 3,5⋅(224426494813,862+ 5699205635886,730))=

= 31099068686168,7

*y*9=224426494813,86+(673279484446,7+2⋅231498227774+2⋅5699205635886,7+

+31099068686168,7)/6 = 8191019144470,020

Десятый шаг:

*k1=*1,5⋅(3,5+10sin(3,5+1)+3,5⋅8191019144470,02)=43002850508458,200

*k2*=1,5⋅(4,25+10sin(4,25+1)+4,25⋅(8191019144470,02+43002850508458,20/2))= =189289333041700

*k3 =* 1,5⋅(4,25+10sin(4,25+1) + 4,25⋅(8191019144470,02+189289333041700/2)) =

=655577496116410

*k4 =* 1,5⋅(5+10sin(5+1) + 5⋅(8191019144470,02+655577496116410/2)) =

=4978263864456600

*y10*=8191019144470,02+(43002850508458,2+2⋅189289333041700+

+2⋅655577496116410+4978263864456600)/6=1126691081358020

Значения функции, полученные методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера и методом Рунге-Кутта занесём в таблицу и построим графики функции.

**Таблица 7 – Значения функции.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| шаг | *xi* | *yi*  по Эйлеру | *yi* по модиф. Эйлеру | *yi* по Рунге-Кутта |
| 0 | -10 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | -8,5 | -21,182 | 111,033 | 1563,447 |
| 2 | -7 | 222,086 | -1779,212 | 859439,709 |
| 3 | -5,5 | -2115,935 | 16289,935 | 185184876,853 |
| 4 | -4 | 15346,939 | -96947,716 | 11792153339,299 |
| 5 | -2,5 | 76742,813 | 337774,793 | 129460339691,629 |
| 6 | -1 | 211024,023 | -453831,067 | 54458048164,364 |
| 7 | 0,5 | -105513,512 | -153018,227 | 37027750043,021 |
| 8 | 2 | -184632,933 | -487339,047 | 224426494813,862 |
| 9 | 3,5 | -738526,615 | -3156982,131 | 8191019144470,02 |
| 10 | 5 | -4615800,756 | -28753316,109 | 1126691081358020 |

**Рис.6. Графики функций по 5-ти точкам**

 **7.2.4 Вывод**

Значения функции, полученные методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера и методом Рунге-Кутта сильно различаются. Это связано с тем, что метод Эйлера является методом решения дифференциальных уравнений первого порядка и в практических расчётах он даёт значительную погрешность. Для повышения точности используют модифицированный метод Эйлера второго порядка.

Метод Рунге-Кутта является методом четвёртого порядка, следовательно, он более точен, чем методы Эйлера.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Васильков Ю. В., Василькова Н. Н.

Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учеб. Пособие. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 256 с.: ил. ISBN 5-279-02098-2.