[Лекция 1: Основные понятия теории моделирования 3](#_Toc375162267)

[Моделирование как метод научного познания 3](#_Toc375162268)

[использование моделирования при исследовании и проектировании сложных систем 4](#_Toc375162269)

[Перспективы развития методов и средств моделирования систем в свете новых информационных технологий 6](#_Toc375162270)

[Лекция 2: Понятие о моделях и моделировании 8](#_Toc375162271)

[Определение модели 8](#_Toc375162272)

[Использование моделей 9](#_Toc375162273)

[Свойства моделей 10](#_Toc375162274)

[Лекция 3 Классификация моделей 14](#_Toc375162275)

[Материальные модели: 14](#_Toc375162276)

[Идеальные модели 15](#_Toc375162277)

[Лекция 4 Принципы математического моделирования 17](#_Toc375162278)

[Определение моделирования 17](#_Toc375162279)

[Математическая модель 17](#_Toc375162280)

[Плохо формализуемые задачи 18](#_Toc375162281)

[Противоречивые модели 18](#_Toc375162282)

[Основы процесса выработки решений 19](#_Toc375162283)

[Научный принцип исследования 20](#_Toc375162284)

[Критерии эффективности 21](#_Toc375162285)

[Классификация математических моделей 22](#_Toc375162286)

[Перечень методов решения 23](#_Toc375162287)

[Лекция 5 Линейные регрессионные модели 24](#_Toc375162288)

[Линейная одномерная регрессионная модель 24](#_Toc375162289)

[Линейная множественная модель 29](#_Toc375162290)

[Лекция 6. Нелинейные регрессионные модели 32](#_Toc375162291)

[Полиномиальная множественная регрессионная модель 32](#_Toc375162292)

[Мультипликативная регрессионная модель 32](#_Toc375162293)

[Обратная регрессионная модель 33](#_Toc375162294)

[Экспоненциальная модель 33](#_Toc375162295)

[Лекция 7. Динамические системы 35](#_Toc375162296)

[Звено первого порядка 38](#_Toc375162297)

[Звено второго порядка (колебательное звено) 40](#_Toc375162298)

[Апериодическое звено 2-го порядка (ξ ≥ 1) 42](#_Toc375162299)

[Колебательное звено 2-го порядка (0 < ξ < 1) 43](#_Toc375162300)

[Консервативное звено 2-го порядка (ξ = 0) 44](#_Toc375162301)

[Лекция 8. Статистическое моделирование 46](#_Toc375162302)

[Метод Монте-Карло 46](#_Toc375162303)

[Схема использования метода Монте-Карло при исследовании систем со случайными параметрами 48](#_Toc375162304)

[Лекция 9. Генераторы случайных чисел 59](#_Toc375162305)

[Физические ГСЧ 61](#_Toc375162306)

[Табличные ГСЧ 62](#_Toc375162307)

[Алгоритмические ГСЧ 65](#_Toc375162308)

[Метод серединных квадратов 65](#_Toc375162309)

[Метод серединных произведений 66](#_Toc375162310)

[Метод перемешивания 66](#_Toc375162311)

[Линейный конгруэнтный метод 67](#_Toc375162312)

[Проверка качества работы генератора 68](#_Toc375162313)

[Проверки на равномерность распределения 69](#_Toc375162314)

[Проверки на статистическую независимость 73](#_Toc375162315)

[Лекция 10 Моделирование систем массового обслуживания 75](#_Toc375162316)

[Анализ временной диаграммы 82](#_Toc375162317)

[Синтез СМО 86](#_Toc375162318)

# Лекция 1: Основные понятия теории моделирования

## Моделирование как метод научного познания

В настоящее время нельзя назвать область человеческой деятельности, в которой в той или иной степени не использовались бы методы моделирования. Особенно это относится к сфере управления различными системами, где основными являются процессы принятия решений на основе получаемой информации. Остановимся на философских аспектах моделирования, а точнее общей теории моделирования.

Методологическая основа моделирования. Все то, на что направлена человеческая деятельность, называется объектом (лат. objection — предмет). Выработка методологии направлена на упорядочение получения и обработки информации об объектах, которые существуют вне нашего сознания и взаимодействуют между собой и внешней средой.

В научных исследованиях большую роль играют гипотезы, т. е. определенные предсказания, основывающиеся на небольшом количестве опытных данных, наблюдений, догадок. Быстрая и полная проверка выдвигаемых гипотез может быть проведена в ходе специально поставленного эксперимента. При формулировании и проверке правильности гипотез большое значение в качестве метода суждения имеет аналогия.

**Аналогией** называют суждение о каком-либо частном сходстве двух объектов, причем такое сходство может быть существенным и несущественным. Необходимо отметить, что понятия существенности и несущественности сходства или различия объектов условны и относительны. Существенность сходства (различия) зависит от уровня абстрагирования и в общем случае определяется конечной целью проводимого исследования. Современная научная гипотеза создается, как правило, по аналогии с проверенными на практике научными положениями. Таким образом, аналогия связывает гипотезу с экспериментом.

Гипотезы и аналогии, отражающие реальный, объективно существующий мир, должны обладать наглядностью или сводиться к удобным для исследования логическим схемам; такие логические схемы, упрощающие рассуждения и логические построения или позволяющие проводить эксперименты, уточняющие природу явлений, называются моделями. Другими словами, модель (лат. modulus — мера) — это объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.

Определение моделирования. Замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели называется моделированием.

Таким образом, моделирование может быть определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем проведения экспериментов с его моделью.

***Теория замещения одних объектов (оригиналов) другими объектами (моделями) и исследования свойств объектов на их моделях называется теорией моделирования.***

Определяя гносеологическую роль теории моделирования, т. е. ее значение в процессе познания, необходимо прежде всего отвлечься от имеющегося в науке и технике многообразия моделей и выделить то общее, что присуще моделям различных по своей природе объектов реального мира. Это общее заключается в наличии некоторой структуры (статической или динамической, материальной или мысленной), которая подобна структуре данного объекта. В процессе изучения модель выступает в роли относительного самостоятельного квазиобъекта, позволяющего получить при исследовании некоторые знания о самом объекте. Если результаты моделирования подтверждаются и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах, то говорят, что модель адекватна объекту. При этом адекватность модели зависит от цели моделирования и принятых критериев.

Обобщенно моделирование можно определить как метод опосредованного познания, при котором изучаемый объект-оригинал находится в некотором соответствии с другим объектом-моделью, причем модель способна в том или ином отношении замещать оригинал на некоторых стадиях познавательного процесса. Стадии познания, на которых происходит такая замена, а также формы соответствия модели и оригинала могут быть различными:

1. моделирование как познавательный процесс, содержащий переработку информации, поступающей из внешней среды, о происходящих в ней явлениях, в результате чего в сознании появляются образы, соответствующие объектам;
2. моделирование, заключающееся в построении некоторой системы-модели (второй системы), связанной определенными соотношениями подобия с системой-оригиналом (первой системой), причем в этом случае отображение одной системы в другую является средством выявления зависимостей между двумя системами, отраженными в соотношениях подобия, а не результатом непосредственного изучения поступающей информации.

Следует отметить, что с точки зрения философии моделирование — эффективное средство познания природы. Процесс моделирования предполагает наличие объекта исследования; исследователя, перед которым поставлена конкретная задача; модели, создаваемой для получения информации об объекте и необходимой для решения поставленной задачи. Причем по отношению к модели исследователь является, по сути дела, экспериментатором, только в данном случае эксперимент проводится не с реальным объектом, а с его моделью. Такой эксперимент для инженера есть инструмент непосредственного решения организационно-технических задач.

Надо иметь в виду, что любой эксперимент может иметь существенное значение в конкретной области науки только при специальной его обработке и обобщении. Единичный эксперимент никогда не может быть решающим для подтверждения гипотезы, проверки теории. Поэтому инженеры (исследователи и практики) должны быть знакомы с элементами современной методологии теории познания и, в частности, не должны забывать основного положения материалистической философии, что именно экспериментальное исследование, опыт, практика являются критерием истины.

## использование моделирования при исследовании и проектировании сложных систем

Одна из проблем современной науки и техники — разработка и внедрение в практику проектирования новейших методов исследования характеристик сложных информационно-управляющих и информационно-вычислительных систем различных уровней (например: автоматизированных систем научных исследований и комплексных испытаний, систем автоматизации проектирования, комплексов и сетей, информационных систем). При проектировании сложных систем и их подсистем возникают многочисленные задачи, требующие оценки количественных и качественных закономерностей процессов функционирования таких систем, проведения структурного алгоритмического и параметрического их синтеза.

В дисциплине рассматриваются системы информатики и вычислительной техники, автоматизированные системы обработки информации и управления, информационные системы относятся к классу больших систем, этапы проектирования, внедрения, эксплуатации и эволюции которых в настоящее время невозможны без использования различных видов моделирования. На всех перечисленных этапах для сложных видов различных уровней необходимо учитывать следующие особенности:

* сложность структуры и стохастичность связей между элементами, неоднозначность алгоритмов поведения при различных условиях,
* большое количество параметров и переменных, неполноту и недетерминированность исходной информации;
* разнообразие и вероятностный характер воздействий внешней среды.

Ограниченность возможностей экспериментального исследования больших систем делает актуальной разработку методики их моделирования, которая позволила бы в соответствующей форме представить процессы функционирования систем, описание протекания этих процессов с помощью математических моделей, получение результатов экспериментов с моделями по оценке характеристики исследуемых объектов. Причем на разных этапах создания и использования перечисленных систем для всего многообразия входящих в них подсистем применение метода моделирования преследует конкретные цели, а эффективность метода зависит от того, насколько грамотно разработчик использует возможности моделирования. Независимо от разбиения конкретной сложной системы на подсистемы при проектировании каждой из них необходимо выполнять внешнее проектирование (макропроектирование) и внутреннее проектирование (микропроектирование). Так как на этих стадиях разработчик преследует различные цели, то и используемые при этом методы и средства моделирования могут существенно отличаться.

На стадии макропроектирования должна быть разработана обобщенная модель процесса функционирования сложной системы, позволяющая разработчику получить ответы на вопросы об эффективности различных стратегий управления объектом при его взаимодействии с внешней средой. Стадию внешнего проектирования можно разбить на анализ и синтез.

При анализе изучают объект управления, строят модель воздействий внешней среды, определяют критерии оценки эффективности, имеющиеся ресурсы, необходимые ограничения. Конечная цель стадии анализа — построение модели объекта управления для оценки его характеристик.

При синтезе на этапе внешнего проектирования решаются задачи выбора стратегии управления на основе модели объекта моделирования, т. е. сложной системы.

На стадии микропроектирования разрабатывают модели с целью создания эффективных подсистем. Причем используемые методы и средства моделирования зависят от того, какие конкретно обеспечивающие подсистемы разрабатываются: информационные, математические, технические, программные и т. д.

Выбор метода моделирования и необходимая детализация моделей существенно зависят от этапа разработки сложной системы. На этапах обследования объекта управления, например промышленного предприятия, и разработки технического задания на проектирование автоматизированной системы управления модели в основном носят описательный характер и преследуют цель наиболее полно представить в компактной форме информацию об объекте, необходимую разработчику системы.

На этапах разработки технического и рабочего проектов систем, модели отдельных подсистем детализируются, и моделирование служит для решения конкретных задач проектирования, т. е. выбора оптимального по определенному критерию при заданных ограничениях варианта из множества допустимых. Поэтому в основном на этих этапах проектирования сложных систем используются модели для целей синтеза.

Целевое назначение моделирования на этапе внедрения и эксплуатация сложных систем — это проигрывание возможных ситуаций для принятия обоснованных и перспективных решений по управлению объектом. Моделирование (имитацию) также широко применяют при обучении и тренировке персонала автоматизированных систем управления, вычислительных комплексов и сетей, информационных систем в различных сферах. В этом случае моделирование носит характер деловых игр. Модель, реализуемая обычно на ЭВМ, воспроизводит поведение управляемого объекта и внешней среды, а люди в определенные моменты времени принимают решения по управлению объектом.

АСОИУ являются системами, которые развиваются по мере эволюции объекта управления, появления новых средств управления и т. д. Поэтому при прогнозировании развития сложных систем роль моделирования очень высока, так как это единственная возможность ответить на многочисленные вопросы о путях дальнейшего эффективного развития системы и выбора из них наиболее оптимального.

## Перспективы развития методов и средств моделирования систем в свете новых информационных технологий

В последние годы основные достижения в различных областях науки и техники неразрывно связаны с процессом совершенствования ЭВМ. Сфера эксплуатации ЭВМ — бурно развивающаяся отрасль человеческой практики, стимулирующая развитие новых теоретических и прикладных направлений. Ресурсы современной информационно-вычислительной техники дают возможность ставить и решать математические задачи такой сложности, которые в недавнем прошлом казались нереализуемыми, например моделирование больших систем.

Исторически первым сложился аналитический подход к исследованию систем, когда ЭВМ использовалась в качестве вычислителя по аналитическим зависимостям. Анализ характеристик процессов функционирования больших систем с помощью только аналитических методов исследования наталкивается обычно на значительные трудности, приводящие к необходимости существенного упрощения моделей либо на этапе их построения, либо в процессе работы с моделью, что может привести к получению недостоверных результатов.

Поэтому в настоящее время наряду с построением аналитических моделей большое внимание уделяется задачам оценки характеристик больших систем на основе имитационных моделей, реализованных на современных ЭВМ с высоким быстродействием и большим объемом оперативной памяти. Причем перспективность имитационного моделирования, как метода исследования характеристик процесса функционирования больших систем возрастает с повышением быстродействия и оперативной памяти ЭВМ, с развитием математического обеспечения, совершенствованием банков данных и периферийных устройств для организации диалоговых систем моделирования. Это, в свою очередь, способствует появлению новых «чисто машинных» методов решения задач исследования больших систем на основе организации имитационных экспериментов с их моделями. Причем ориентация на автоматизированные рабочие места на базе персональных ЭВМ для реализации экспериментов с имитационными моделями больших систем позволяет проводить не только анализ их характеристик, но и решать задачи структурного, алгоритмического и параметрического синтеза таких систем при заданных критериях оценки эффективности и ограничениях.

Расширение возможностей моделирования различных классов больших систем неразрывно связано с совершенствованием средств вычислительной техники и техники связи. Перспективным направлением является создание для целей моделирования иерархических многомашинных вычислительных систем и сетей.

В зависимости от специфики исследуемых объектов в ряде случаев эффективным оказывается моделирование на аналоговых вычислительных машинах (АВМ). При этом надо иметь в виду, что АВМ значительно уступают ЭВМ по точности и логическим возможностям, но по быстродействию, схемной простоте реализации, сопрягаемости с датчиками внешней информации АВМ превосходят ЭВМ или по крайней мере не уступают им.

Для сложных динамических объектов перспективным является моделирование на базе гибридных (аналого-цифровых) вычислительных комплексов. Такие комплексы реализуют преимущества цифрового и аналогового моделирования и позволяют наиболее эффективно использовать ресурсы ЭВМ и АВМ в составе единого комплекса. При использовании гибридных моделирующих комплексов упрощаются вопросы взаимодействия с датчиками, установленными на реальных объектах, что позволяет, в свою очередь, проводить комбинированное моделирование с использованием аналого-цифровой части модели и натурной части объекта. Такие гибридные моделирующие комплексы могут входить в состав многомашинного вычислительного комплекса, что еще больше расширяет его возможности с точки зрения моделируемых классов больших систем.

Конец XX столетия ознаменовался интенсивным развитием и внедрением вовсе сферы жизни общества информатики. Это проявилось в интенсивном совершенствовании средств вычислительной техники и техники связи, в появлении новых и в дальнейшем развитии существующих информационных технологий, а также в реализации прикладных информационных систем. Достижения информатики заняли достойное место в организационном управлении, в промышленности, в проведении научных исследований и в автоматизированном проектировании. Информатизация охватила и социальную сферу: образование, науку, культуру, здравоохранение.

# Лекция 2: Понятие о моделях и моделировании

## Определение модели

Термин модель неоднозначен и охватывает чрезвычайно широкий круг материальных и идеальных объектов. Признаком, объединяющим такие, казалось бы, несопоставимые объекты как система дифференциальных уравнений математической физики и пара дамских туфель, выставленных на витрине, является их информационная сущность. Любая модель – идеальная или материальная, используемая в научных целях, на производстве или в быту – несет информацию о свойствах и характеристиках исходного объекта (объекта - оригинала), существенных для решаемой субъектом задачи. Модели – отражение знаний об окружающем мире.

Пусть имеется некоторая конкретная система. Лишь в единичных случаях мы имеем возможность провести с самой этой системой все интересующие нас исследования. С ростом сложности системы возможности натурного эксперимента резко падают. Он становится дорогим, трудоемким, длительным по времени, в слабой степени вариативным. Тогда предпочтительнее работа с моделью. В ряде же случаев мы вообще не имеем возможности наблюдать систему в интересующем нас состоянии. Например, разбор аварии на техническом объекте приходится вести по ее протокольному описанию. Специалист по электронной технике будет изучать большинство типов ЭВМ по литературе, и только часть из них опробует на практике. В этих примерах доступна лишь модель, но это не мешает нам эффективно познавать систему.

Рассмотрение вместо самой системы (явления, процесса, объекта) ее модели практически всегда несет идею упрощения. Мы огрубляем представления о реальном мире, так как оперировать категорией модели экономичнее, чем действительностью. Но вопрос выделения и формальной фиксации тех особенностей, которые существенны для целей рассмотрения, весьма непрост. Известно большое количество удачных моделей, составляющих предмет гордости человеческой мысли, — от конечноэлементной модели в прикладных задачах математической физики до модели генетического кода. Однако велико количество процессов и явлений, для которых на настоящий момент нет удовлетворительного описания. Правда, в области техники положение с моделированием можно считать удовлетворительным, но и здесь имеются «узкие» места, связанные с плохо определяемыми параметрами, коэффициентами, а также слишком грубые описания.

**Определение.** *Модель в общем смысле есть создаваемый с целью получения и (или) хранения информации специфический объект (в форме мысленного образа, описания знаковыми средствами либо материальной системы), отражающий свойства, характеристики и связи объекта – оригинала произвольной природы, существенные для задачи, решаемой субъектом.*

Непосредственно из структуры принятого определения вытекают ряд общих свойств моделей, которые обычно принимаются во внимание в практике моделирования.

1. Модель представляет собой «четырехместную конструкцию», компонентами которой являются субъект; задача, решаемая субъектом; объект-оригинал и язык описания или способ воспроизведения модели. Особую роль в структуре обобщенной модели играет решаемая субъектом задача. Вне контекста задачи или класса задач понятие модели не имеет смысла.
2. Каждому материальному объекту, вообще говоря, соответствует бесчисленное множество в равной мере адекватных, но различных по существу моделей, связанных с разными задачами.
3. Паре задача-объект тоже соответствует множество моделей, содержащих в принципе одну и ту же информацию, но различающихся формами ее представления или воспроизведения.
4. Модель, по определению, всегда является лишь относительным, приближенным подобием объекта-оригинала и в информационном отношении принципиально беднее последнего. Это ее фундаментальное свойство.
5. Произвольная природа объекта-оригинала, фигурирующая в принятом определении, означает, что этот объект может быть материально-вещественным, может носить чисто информационный характер и, наконец, может представлять собой комплекс разнородных материальных и информационных компонентов. Однако независимо от природы объекта, характера решаемой задачи и способа реализации модель представляет собой информационное образование.
6. Частным, но весьма важным для развитых в теоретическом отношении научных и технических дисциплин является случай, когда роль объекта-моделирования в исследовательской или прикладной задаче играет не фрагмент реального мира, рассматриваемый непосредственно, а некий идеальный конструкт, т.е. по сути дела другая модель, созданная ранее и практически достоверная. Подобное вторичное, а в общем случае n-кратное моделирование может осуществляться теоретическими методами с последующей проверкой получаемых результатов по экспериментальным данным, что характерно для фундаментальных естественных наук. В менее развитых в теоретическом отношении областях знания (биология, некоторые технические дисциплины) вторичная модель обычно включает в себя эмпирическую информацию, которую не охватывают существующие теории.

## Использование моделей

Модель вместо исходного объекта используется в случаях, когда эксперимент опасен, дорог, происходит в неудобном масштабе пространства и времени (долговременен, слишком кратковременен, протяжен…), невозможен, неповторим, ненагляден и т. д. Проиллюстрируем это:

«эксперимент опасен» — при деятельности в агрессивной среде вместо человека лучше использовать его макет; примером может служить луноход;

«дорог» — прежде чем использовать идею в реальной экономике страны, лучше опробовать её на математической или имитационной модели экономики, просчитав на ней все «за» и «против» и получив представление о возможных последствиях;

«долговременен» — изучить коррозию — процесс, происходящий десятилетия, — выгоднее и быстрее на модели;

«кратковременен» — изучать детали протекания процесса обработки металлов взрывом лучше на модели, поскольку такой процесс скоротечен во времени;

«протяжен в пространстве» — для изучения космогонических процессов удобны математические модели, поскольку реальные полёты к звёздам (пока) невозможны;

«микроскопичен» — для изучения взаимодействия атомов удобно воспользоваться их моделью;

«невозможен» — часто человек имеет дело с ситуацией, когда объекта нет, он ещё только проектируется. При проектировании важно не только представить себе будущий объект, но и испытать его виртуальный аналог до того, как дефекты проектирования проявятся в оригинале. Важно: моделирование теснейшим образом связано с проектированием. Обычно сначала проектируют систему, потом её испытывают, потом снова корректируют проект и снова испытывают, и так до тех пор, пока проект не станет удовлетворять предъявляемым к нему требованиям. Процесс «проектирование-моделирование» цикличен. При этом цикл имеет вид спирали — с каждым повтором проект становится все лучше, так как модель становится все более детальной, а уровень описания точнее;

«неповторим» — это достаточно редкий случай, когда эксперимент повторить нельзя; в такой ситуации модель — единственный способ изучения таких явлений. Пример — исторические процессы, — ведь повернуть историю вспять невозможно;

«ненагляден» — модель позволяет заглянуть в детали процесса, в его промежуточные стадии; при построении модели исследователь как бы вынужден описать причинно-следственные связи, позволяющие понять все в единстве, системе. Построение модели дисциплинирует мышление. Важно: модель играет системообразующую и смыслообразующую роль в научном познании, позволяет понять явление, структуру изучаемого объекта. Не построив модель, вряд ли удастся понять логику действия системы. Это означает, что модель позволяет разложить систему на элементы, связи, механизмы, требует объяснить действие системы, определить причины явлений, характер взаимодействия составляющих.

## Свойства моделей

Свойства любой модели таковы:

* конечность: модель отображает оригинал лишь в конечном числе его отношений и, кроме того, ресурсы моделирования конечны;
* упрощенность: модель отображает только существенные стороны объекта;
* приблизительность: действительность отображается моделью грубо или приблизительно;
* адекватность: модель успешно описывает моделируемую систему;
* информативность: модель должна содержать достаточную информацию о системе - в рамках гипотез, принятых при построении модели.

Процесс моделирования есть процесс перехода из реальной области в виртуальную (модельную) посредством формализации, далее происходит изучение модели (собственно моделирование) и, наконец, интерпретация результатов как обратный переход из виртуальной области в реальную. Этот путь заменяет прямое исследование объекта в реальной области, то есть лобовое или интуитивное решение задачи. Итак, в самом простом случае технология моделирования подразумевает 3 этапа:

формализация,

собственно моделирование,

интерпретация.

Реальный объект

Модель

Прямое исследование

Формализация

Интерпретация

Моделирование

Рис. 2.1. Процесс моделирования (базовый вариант)

Если требуется уточнение, эти этапы повторяются вновь и вновь: формализация (проектирование), моделирование, интерпретация. Спираль! Вверх по кругу.

Поскольку моделирование — способ замещения реального объекта его аналогом, то возникает вопрос: насколько аналог должен соответствовать исходному объекту?

**Вариант 1:** соответствие — 100%. Очевидно, что точность решения в этом случае максимальна, а ущерб от применения модели минимален. Но затраты на построение такой модели бесконечно велики, так как объект повторяется во всех своих деталях; фактически, создаётся точно такой же объект путём копирования его до атомов (что само по себе не имеет смысла).

**Вариант 2:** соответствие — 0%. Модель совсем не похожа на реальный объект. Очевидно, что точность решения минимальна, а ущерб от применения модели максимален, бесконечен. Но затраты на построение такой модели нулевые.

Конечно, варианты 1 и 2 — это крайности. На самом деле модель создаётся из соображений компромисса между затратами на её построение и ущербом от неточности её применения. Это точка между двумя бесконечностями. То есть, моделируя, следует иметь в виду, что исследователь (моделировщик) должен стремиться к оптимуму суммарных затрат, включающих ущерб от применения и затраты на изготовление модели (см. рис. 2.2).

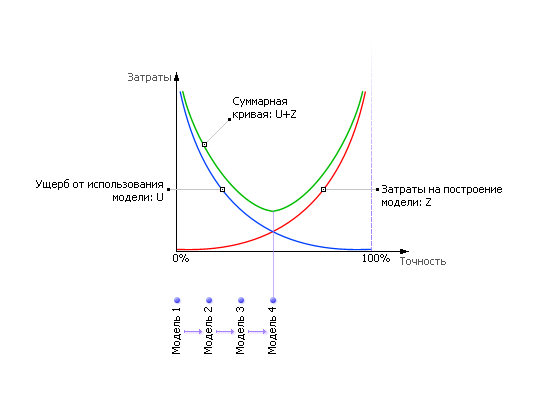


Рис. 2.2. Соотношение суммарных затрат и точности

для различных вариантов детализации прикладной модели

Просуммируйте две кривые затрат — получится одна кривая общих затрат. Найдите оптимум на суммарной кривой: он лежит между этими крайними вариантами. Видно, что неточные модели не нужны, но и абсолютная точность тоже не нужна, да и невозможна. Частое и распространённое заблуждение при построении моделей — требовать «как можно точнее».

«Модель — поиск конечного в бесконечном» — эта мысль принадлежит Д. И. Менделееву. Что отбрасывается, чтобы превратить бесконечное в конечное? В модель включаются только существенные аспекты, представляющие объект, и отбрасываются все остальные (бесконечное большинство). Существенный или несущественный аспект описания определяют согласно цели исследования. То есть каждая модель составляется с какой-то целью. Начиная моделирование, исследователь должен определить цель, отделив её от всех возможных других целей, число которых, по-видимому, бесконечно.

К сожалению, указанная на рис. 2.2 кривая является умозрительной и реально до начала моделирования построена быть не может. Поэтому на практике действуют таким образом: двигаются по шкале точности слева направо, то есть от простых моделей («Модель 1», «Модель 2»…) ко все более сложным («Модель 3», «Модель 4»…). А процесс моделирования имеет циклический спиралевидный характер: если построенная модель не удовлетворяет требованиям точности, то её детализируют, дорабатывают на следующем цикле (см. рис. 2.3).

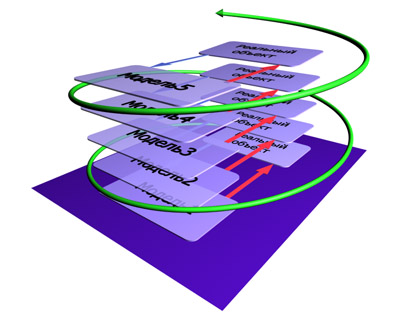


Рис. 2.3. Спиралевидный характер процесса проектирования и уточнения прикладных моделей

Улучшая модель, следят, чтобы эффект от усложнения модели превышал связанные с этим затраты. Как только исследователь замечает, что затраты на уточнение модели превышают эффект от точности при применении модели, следует остановиться, поскольку точка оптимума достигнута. Такой подход всегда гарантирует окупаемость вложений.

Из всего сказанного следует, что моделей может быть несколько: приближенная, более точная, ещё точнее и так далее. Модели как бы образуют ряд. Двигаясь от варианта к варианту, исследователь совершенствует модель. Для построения и совершенствования моделей необходима их преемственность, средства отслеживания версий и так далее, то есть моделирование требует инструмента и опирается на технологию.

# Лекция 3 Классификация моделей

Каждая модель характеризуется тремя признаками:

* принадлежностью к определённому классу задач (по классам задач)
* указанием класса объектов моделирования (по классам объектов)
* способом реализации (по форме представления и обработки информации).

Рассмотрим более подробно последний вид классификации. По этому признаку модели делятся на материальные и идеальные.

## Материальные модели:

* геометрически подобные масштабные, воспроизводящие пространственно- геометрические характеристики оригинала безотносительно его субстрату (макеты зданий и сооружений, учебные муляжи и др.);
* основанные на теории подобия субстратно подобные, воспроизводящие с масштабированием в пространстве и времени свойства и характеристики оригинала той же природы, что и модель, (гидродинамические модели судов, продувочные модели летательных аппаратов);
* аналоговые приборные, воспроизводящие исследуемые свойства и характеристики объекта оригинала в моделирующем объекте другой природы на основе некоторой системы прямых аналогий (разновидности электронного аналогового моделирования).

Рассмотрим более подробно два последних пункта. Для парохода правильный выбор обводов, подбор гребного винта и согласование с характеристиками винта и корпуса мощности и скорости вращения вала – проблема №1. По существу речь идет о необходимости оптимизировать взаимодействие системы корпус – винт – двигатель с обтекающей судно жидкой средой по критерию максимального КПД. Решение проблемы опытным путем невозможно по очевидным экономическим соображениям, не поддается она и теоретическому решению. Выход был найден на пути синтеза теории масштабного гидродинамического моделирования, т.е. экспериментальное исследование малых геометрически подобных моделей проектируемых судов в специальных бассейнах на основе теории подобия. Теория обеспечивала возможность достоверного переноса данных, полученных на модели, на «натуру», на свойства и характеристики реального, но еще не существующего судна. И сегодня методы масштабного физического моделирования сохраняют свое значение.

Аналоговое моделирование основано на том, что свойства и характеристики некоторого объекта воспроизводятся с помощью модели иной, чем у оригинала физической природы. Целый ряд явлений и процессов существенно различной природы описывается аналогичными по структуре математическими выражениями. Описываемые аналогичными математическими структурами разнородные объекты можно рассматривать как пару моделей, которые с точностью до свойств, учитываемых в математическом описании, взаимно отображают друг друга, причем коэффициенты, связывающие соответственные (сходственные) параметры, являются в этом случае размерными величинами.

## Идеальные модели

a) неформализованные модели, т.е. системы представлений об объекте оригинале, сложившиеся в человеческом мозгу;

b) частично формализованные:

* вербальные – описание свойств и характеристик оригинала на некотором естественном языке (текстовые материалы проектной документации, словесное описание результатов технического эксперимента);
* графические иконические – черты, свойства и характеристики оригинала, реально или хотя бы теоретически доступные непосредственно зрительному восприятию (художественная графика, технологические карты);
* графические условные – данные наблюдений и экспериментальных исследований в виде графиков, диаграмм, схем;

c) вполне формализованные (математические) модели.

Основное отличие этого типа моделей от остальных состоит в вариативности — в кодировании одним знаковым описанием огромного количества конкретных вариантов поведения системы. Tак, линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами описывают и движение массы на пружине, и изменение тока в колебательном контуре, и измерительную схему системы автоматического регулирования, и ряд других процессов. Однако еще более важно то, что в каждом из этих описаний одни и те же уравнения в буквенном (а вообще говоря, и в числовом) виде соответствуют бесконечному числу комбинаций конкретных значений параметров. Скажем, для процесса механических колебаний — это любые значения массы и жесткости пружины.

В знаковых моделях возможен дедуктивный вывод свойств, количество следствий в них обычно более значительно, чем в моделях других типов. Они отличаются компактной записью удобством работы, возможностью изучения в форме, абстрагированной от конкретного содержания. Все это позволяет считать знаковые модели наивысшей ступенью и рекомендовать стремиться к такой форме моделирования.

Заметим, что деление моделей на вербальные, натурные и знаковые в определенной степени условно. Так, существуют смешанные типы моделей, скажем, использующие и вербальные, и знаковые построения.

Первым шагом к осознанному построению модели во всех случаях является уяснение и четкая формулировка исследования или иной задачи, ради решения которой осуществляется моделирование. Этот шаг базируется на содержательном анализе исходной проблемы, предполагает сбор и осмысление всех уже имеющихся данных, относящихся к задаче. Следующий шаг, с которого начинается процедура собственно моделирования, заключается в определении границ объекта, подлежащего модельному описанию и исследованию с целью решения задачи. Здесь возможен очень широкий диапазон различных ситуаций (зависит от характера задачи, степени сложности и изученности). Будем считать, что в соответствии с имеющейся информацией мы приняли некоторую гипотезу о границах объекта, подлежащего модельному исследованию. Исходя из принципа всеобщей взаимосвязи и взаимозависимости, можно утверждать, что в общем случае выявленный объект, с одной стороны, подвергается воздействиям со стороны окружающей среды, с другой – сам воздействует на эту среду, изменяя её состояние. Связи среда – объект будем именовать, как это принято, входными воздействиями или входами Х (часто вводят разделение входных воздействий на управления (U) и возмущения (V)), а воздействия объект – среда (Y) – выходными.

Очевидно, что достаточно полный (с точки зрения решаемой задачи) учет входных и выходных связей объекта с более широкой системой (средой), компонентом которой он является, есть необходимое условие правомерности выделения объекта из среды. Каждая упущенная исследованием существенная связь создает угрозу того, что состояние и свойства выявленного объекта уже не будут соответствовать тем, которые имели место в исходной реальной системе и модель, базирующаяся на подобном представлении, окажется заведомо неадекватной. С другой стороны, по практическим соображениям в модели желательно учитывать возможно меньшее число факторов, ибо её сложность и громоздкость являются не менее серьезными недостатками, чем неполнота. Разрешение данного противоречия, т.е. выбор подлежащих учету в модели существенных входных и выходных воздействий и абстрагирование от прочих, предположительно незначимых, представляет собой весьма ответственный момент при построении любой модели, т.к. решающим образом влияет на её качество и эффективность. Здесь необходимо глубокое понимание существа решаемой задачи, тщательное изучение воспроизводимой в модели исходной реальной системы, необходим опыт и эвристические способности. Если моделируемый объект представляет собой реально существующую материальную систему, его связями, очевидно, являются также вполне реальные материальные факторы: силы различной природы, пространственные перемещения с их производными, потоки вещества, потоки энергии, а в некоторых случаях потоки информации. Все они должны быть исследованы и описаны в качественном и количественном отношении, оценены посредством «числа и меры», после чего превращаются в информационные конструкты и приобретают статус переменных модели.

Использование математической модели в современном смысле слова не связано с материальным воспроизведением подлежащих исследованию свойств и характеристик объекта и не предполагает экспериментальных процедур. Объект, описанный на языке математики, представляется некоторой математической структурой (дифференциальными или конечно-разностными уравнениями, передаточной функцией, графом и т.п.) с определенными параметрами, а процесс исследования (так называемое решение математической модели) заключается в применении к этой структуре совокупности математических преобразований и операций в соответствии с некоторым алгоритмом. Результатом вычислительного процесса является новая информация об объекте, разумеется, в той части его свойств, которые нашли отражение в исходном математическом описании. Возможности современных ЭВМ и программных средств позволяют исследовать эти свойства при всевозможных вариациях параметров, входящих в исходную модель, определять присущие ей вероятностно-статистические характеристики, находить значения параметров, оптимальных по тому или иному критерию и решать множество других самых разнообразных задач.

# Лекция 4 Принципы математического моделирования

## Определение моделирования

**Моделированием** называют построение модели того или иного явления реального мира. В общем виде модель — это абстракция реального явления, сохраняющая его существенную структуру таким образом, чтобы ее анализ дал возможность определить влияние одних сторон явления на другие или же на явления в целом. В зависимости от логических свойств и связей моделей с отображаемыми явлениями можно все модели разделить на три типа: изобразительные, аналоговые и математические.

Изобразительная модель отражает внешние характеристики явления и подобна оригиналу. Это наиболее простая и конкретная модель. Являясь в общем описательной моделью, она, как правило, не дает возможности установить причинные связи явления и соответственно определить или предсказать последствия изменений различных параметров явления. Характерная особенность такой модели – близкое совпадение ее свойств со свойствами отображаемого объекта. Эти свойства обычно подвергаются метрическому преобразованию, т.е. берется определенный масштаб.

В аналоговых моделях свойство данного явления отображается посредством свойств другого явления. Так, например, любая диаграмма представляет аналоговую модель некоторого явления. К аналоговым моделям относятся также морские карты, на которых совокупностью условных обозначений отображается совокупность свойств той или иной акватории. Преимущество аналоговой модели перед изобразительной состоит в том, что она позволяет отображать динамику явления. Другим преимуществом является большая универсальность этой модели: путем ее изменения можно отобразить различные процессы данного явления.

## Математическая модель

**Математическая модель** является самой сложной и наиболее общей и абстрактной по сравнению с изобразительной и аналоговой. В ней для отображения свойств изучаемого явления используются символы математического или логического характера. Особые трудности возникают при решении задач с большой размерностью, расплывчатой постановкой, неопределенностью информации и т.д. В постановке таких задач появляются неклассические моменты, такие, как плохая формализуемость, нестандартность, противоречивость.

Остановимся на понятии плохо формализуемой задачи, которое появляется в результате решения потока серьезных прикладных задач в самых различных областях. Это могут быть и формализованные правила рассуждений, и правила логического вывода. Математические модели служат отражению и анализу некоторых свойств действительных объектов. Рассмотрим один из видов математических моделей, характеризующихся простой структурой и широко применяющихся в приложениях. Модели такого вида содержат следующие элементы:

1. вектор  параметров, измеряемых на объекте: где — значение -го параметра, которое является чаще всего вещественным числом. Можно назвать  вектором состояния объекта. Если изучается динамика моделируемого объекта во времени , то считается, что состояние в каждой момент описывается вектором ;
2. вектор  параметров, которые не могут быть непосредственно измеренными;
3. неизвестные связи между переменными координатами векторов  и ;
4. связи между переменными, являющиеся неизвестными;
5. математический аппарат исследования соотношений (связей).

В качестве примера можно привести имитационные модели, описывающие возможные пути развития сложных технико-экономических и природных систем.

## Плохо формализуемые задачи

Поясним теперь, что понимается под плохо ***формализуемыми задачами***: это задачи, условия которых определены не полностью, не все связи заданы в аналитической форме, при этом формулировка задачи может содержать противоречия, а также не все соглашения о понятии решения могут быть в наличии.

Решению таких (плохо формализуемых) задач предшествуют этапы преобразования их формулировки, уточнений и упрощений. Результатом этих этапов является получение комплекса формализованных задач, имеющего некоторое отношение к исходной задаче. Необходимо знание этого отношения, иначе точность, достигаемая формальными методами, может оказаться бесполезной.

В сферу модели естественно также включить описание исходной задачи, выбираемый язык, критерии и ограничения, аппарат адекватности модели, средства интерпретации и подготовки к практическому внедрению, способы вне модельного анализа, учета плохо формализуемых факторов.

Можно выделить следующие разновидности плохо формализуемых задач.

1. Нестационарные — эти задачи отличаются эволюцией информации об объекте и модельных представлений о нем.
2. Задачи с расплывчатым отражением некоторых зависимостей и плохо определенными ограничениями. Здесь для описания зависимостей и ограничений требуется использовать специальные процедуры диалога с экспертами, а также проводить целенаправленные серии экспериментов.
3. Задачи с несовместными системами условий и ограничений и неопределенным понятием решения (неособенные задачи).
4. Задачи, в которых оценка решения производится по системе несогласованных (противоречивых) критериев.
5. Задачи с неоднозначно определенным решением.
6. Неустойчивые или некорректные задачи.

## Противоречивые модели

***Противоречивые знаковые модели*** возникают и в эмпирических исследованиях, и в формально-логических. Поэтому необходимо использовать обобщения понятия существования решения, применять "размытые" определения и принципы принятия практических решений, вводить обобщения понятия непротиворечивости теоретической модели. Так, например, некоторые логические парадоксы могут быть связаны с несовместными системами предикатов, которым можно поставить в соответствие лишь несобственные объекты. Один из путей снятия таких парадоксов — в расширении представлений об объектах, в ослаблении накладываемых при определении объекта требований, в их "размывании", в расширении смысла понятия существования объекта.

Противоречивые определения объектов и противоречивые модели иногда возникают в результате абсолютизации локальных свойств реально существующих объектов. Другая возможная причина появления противоречивых моделей — наличие различных несогласованных источников информации, которая служит основой моделирования.

В прикладной математике наблюдается заметный интерес к описанию противоречивых ситуаций; он вызван, вероятно, необходимостью повысить реальный результат применения математических моделей и методов к решению сложных практических задач. Примеры решения противоречивых задач можно видеть и в сфере оптимизации, и в сфере распознавания образов. В некоторых случаях содержательный смысл модели может диктовать такой вид работы с ней, как выделение ее непротиворечивых подмоделей, в других случаях возможно ослабление ограничений модели, приводящее к ее непротиворечивости.

## Основы процесса выработки решений

В процессе выработки решений применимы такие конкретные методы, как *анализ*, *синтез*, *индукция*, *дедукция*, *аналогия*, *абстракция* и *конкретизация*.

***Анализ*** – логический прием расчленения целого на отдельные элементы с рассмотрением каждого из них в отдельности. При этом в процессе выработки решения анализу подвергаются поставленная задача, данные обстановки.

Анализ неразрывно связан с синтезом — объединением всех данных, полученных в результате анализа. Синтез — это не простое суммирование результатов анализа. Задача его состоит в мысленном воспроизведении основных связей между элементами обстановки. Синтез дает возможность вскрыть сущность процессов, установить причинно-следственные связи, прогнозировать развитие действий.

Анализ и синтез тесно переплетаются с индукцией и дедукцией.

***Индукция*** — движение мысли от частного к общему, от ряда факторов к закону.

***Дедукция***, наоборот, идет от общего к частному, от закона к отдельным его проявлениям.

Индуктивный прием используется в тех случаях, когда на основе частного фактора можно сделать общие выводы, установить взаимосвязь между отдельными явлениями и каким-либо законом. Анализируя обстановку, необходимо следовать то от частного к общему (индукция), то от общего к частному (дедукция), стремясь установить взаимосвязь между явлениями обстановки и законом.

В процессе выработки решения можно использовать ***абстрагирование*** — способность отвлечься от совокупности факторов и сосредоточить внимание на каком-либо одном вопросе. При абстракции хотя и достигаются частные цели, однако они не могут служить основанием для решения. Поэтому наряду с абстракцией должна применяться ***конкретизация*** — увязка того или иного явления с конкретными условиями.

Существенное значение в процессе выработки решений может сыграть ***аналогия*** — прием, в котором из сходства двух явлений в одних условиях делается вывод о сходстве этих явлений в других условиях. Однако, аналогия — не доказательство, она лишь дает почву для высказывания предположения о возможном развитии характера действий, дает толчок в мышлении.

В ходе выработки решения важно установить причинно-следственные связи между элементами. ***Причинность*** — одна из всеобщих форм объективной связи между предметами, явлениями и процессами реальной действительности.

## Научный принцип исследования

Процесс исследования включает следующие основные этапы.

1. Постановка задачи.
2. Построение математической модели.
3. Нахождение решения с помощью модели.
4. Послемодельный анализ и корректировка полученного результата.

Построение математической модели требует:

* выделения рассматриваемого объекта, отбрасывания всего несущественного и уяснения всего существенного;
* точного количественного описания ситуации, с тем чтобы это описание можно было перевести на математический язык;
* определение набора параметров, характеризующих как состояние системы, так и возможное управление системой;
* определение зависимости между параметрами состояния и управления;
* определение цели через параметры системы в терминах соответствующей математической модели.

Математическая модель устанавливает соответствие между значениями управляемых и неуправляемых переменных и определяет результаты решения.

В самом общем виде математическая модель может быть представлена в виде



  где — критерий эффективности,

— управляемые переменные,

— неуправляемые переменные или случайные воздействия,

— функции, выражающие ограничения.

Обычно речь идет о нахождении оптимума критерия эффективности при соблюдении данных ограничений.

Выбор метода решения зависит от вида модели. Существуют четыре типа методов нахождения решения:

* аналитический,
* численный метод,
* статистических испытаний,
* эвристический.

Поскольку модель не может быть точным отображением реальности, полученное решение может оказаться неприемлемым для условий конкретной ситуации. Поэтому необходим анализ полученного в результате моделирования решения, который заключается в проверке адекватности модели, а также в корректировке решения при его использовании в качестве основы для выработки решения.

Нарушение адекватности отображения моделью реальности может произойти по следующим причинам.

1. Модель может неправильно отражать действительную зависимость, которая существует между результатом операции и переменными.
2. В модели могут не учитываться переменные, которые в действительности влияют на результат.
3. Значения переменных, входящих в модель, могут быть оценены неправильно.

Анализ результатов моделирования осуществляется для установления адекватности отображения моделью реальности, а в случае её нарушения — выявления причин нарушения и соответствующего изменения модели.

## Критерии эффективности

***Критерий эффективности*** как мера успешности решения задач.

Выбор критерия эффективности является наиболее ответственным этапом всей постановки задачи. Основным требованием, предъявляемым к критерию эффективности, является установление строгого соответствия между ним и конечной целью.

Если рассматривать применение критериев эффективности для оптимизации, то в самом общем виде оптимизация сводится к нахождению решений, соответствующих максимальному значению численного выражения избранного критерия эффективности.

## Классификация математических моделей

Математические модели можно классифицировать по следующим признакам:

* по времени, как постоянного или переменного параметра;
* по числу сторон, принимающих решения:
* по наличию или отсутствию случайных (или неопределенных) факторов;
* по виду критерия эффективности и наложенных ограничений.

В зависимости от способа учета изменения времени математические модели делятся на два типа: статические и динамические. ***Статическая модель*** — это модель, в которой время не является переменной. В ***динамической же модели*** одной из переменных является время.

Математические модели в зависимости от числа сторон, принимающих решение, можно разделить на два типа: *описательные* и *нормативные*. В описательной модели нет сторон, принимающих решения. Формально число таких сторон в ***описательной модели*** равно нулю. Типичным примером подобных моделей является модели систем массового обслуживания. Для построения описательных моделей может также использоваться теория надежности, теория графов, теория вероятностей, метод статистических испытаний (метод Монте-Карло).

Для ***нормативной модели*** характерно множество сторон. Принципиально можно выделить два вида нормативных моделей: модели оптимизации и теоретико-игровые.

В ***моделях оптимизации*** основная задача выработки решений технически сводится к строгой максимизации или минимизации критерия эффективности, т.е. определяются такие значения управляемых переменных, при которых критерий эффективности достигает экстремального значения (максимума или минимума).

Для выработки решений, отображаемых моделями оптимизации, наряду с классическими и новыми вариационными методами (поиск экстремума) наиболее широко используются методы математического программирования (линейное, нелинейное, динамическое).

Для ***теоретико-игровой модели*** характерна множественность числа сторон (не менее двух). Если имеются две стороны с противоположными интересами, то используется теория игр, если число сторон более двух и между ними невозможны коалиции и компромиссы, то применяется теория бескоалиционных игр n лиц.

Математические модели в зависимости от наличия или отсутствия случайных (или неопределенных) факторов можно разделить на следующие типы.

***Детерминированная модель*** строится в тех случаях, когда факторы, влияющие на исход операции, поддаются достаточно точному измерению или оценке, а случайные факторы либо отсутствуют, либо ими можно пренебречь.

В ***стохастических моделях*** реальность отображается как некоторый случайный процесс, ход и исход которого описывается теми или иными характеристиками случайных величин: математическими ожиданиями, дисперсиями, функциями распределения и т.д. Построение такой модели возможно, если имеется достаточный фактический материал для оценки необходимых вероятностных распределений или если теория рассматриваемого явления позволяет определить эти распределения теоретически (на основе формул теории вероятностей, предельных теорем и т.д.)

В теоретико-игровых моделях учитывается недостаточность информации о действиях противника и необходимость принимать решение в условиях неопределенности. Теоретико-игровой подход в том, по существу, и состоит, что выявляется наименее благоприятное вероятностное распределение значений неуправляемых переменных и определяется оптимальное действие в этих наименее благоприятных условиях.

Недостаток теоретико-игровой модели по сравнению со стохастической (точно так же, как и недостаток стохастической модели по сравнению с детерминированной) состоит в больших математических трудностях в теоретическом плане и в существенно большем объеме вычислительных работ в плане практическом.

Математические модели в зависимости от вида критерия эффективности и наложенных ограничений можно разделить на два типа: *линейные* и *нелинейные*. В ***линейных моделях*** критерий эффективности и наложенные ограничения являются линейными функциями переменных модели ( иначе ***нелинейные модели***). Допущение о линейной зависимости критерия эффективности и совокупности наложенных ограничений от переменных модели на практике вполне приемлемо. Это позволяет для выработки решений использовать хорошо разработанный аппарат линейного программирования. Приведенная классификация математических моделей в определенной мере весьма условна и неполна.

## Перечень методов решения

1. Решения методами теории вероятностей.
2. Решения методами теории массового обслуживания.
3. Решения методами теории поиска.
4. Решения методами сетевого планирования.
5. Решения с использованием линейного и нелинейного программирования.
6. Решения методами динамического программирования.
7. Решения методами теории игр.
8. Решения методами теории статистических решений и последовательного анализа.

# Лекция 5 Линейные регрессионные модели

В целях исследований часто бывает удобно представить исследуемый объект в виде ящика, имеющего входы и выходы, не рассматривая детально его внутренней структуры. Конечно, преобразования в ящике (на объекте) происходят (сигналы проходят по связям и элементам, меняют свою форму и т. п.), но при таком представлении они происходят скрыто от наблюдателя.

По степени информированности исследователя об объекте существует деление объектов на три типа «ящиков»:

* «белый ящик»: об объекте известно все;
* «серый ящик»: известна структура объекта, неизвестны количественные значения параметров;
* «черный ящик»: об объекте неизвестно ничего.

Черный ящик условно изображают как на рис. 5.1.

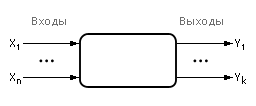


Рис. 5.1. Обозначение черного ящика на схемах

Значения на входах и выходах черного ящика можно наблюдать и измерять. Содержимое ящика неизвестно.

Задача состоит в том, чтобы, зная множество значений на входах и выходах, построить модель, то есть определить функцию ящика, по которой вход преобразуется в выход. Такая задача называется **задачей регрессионного анализа**.

В зависимости от того, доступны входы исследователю для управления или только для наблюдения, можно говорить про активный или пассивный эксперимент с ящиком.

## Линейная одномерная регрессионная модель

Пусть, например, перед нами стоит задача определить, как зависит выпуск продукции от количества потребляемой электроэнергии. Результаты наблюдений отобразим на графике (см. рис. 5.2). Всего на графике n экспериментальных точек, которые соответствуют n наблюдениям.

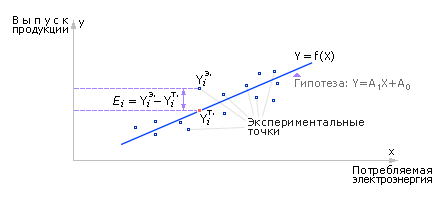


Рис. 5.2. Графический вид представления результатовнаблюдения над черным ящиком

Для начала предположим, что мы имеем дело с черным ящиком, имеющим один вход и один выход. Допустим для простоты, что зависимость между входом и выходом линейная или почти линейная. Тогда данная модель будет называться ***линейной одномерной регрессионной моделью***.

**1) Исследователь вносит гипотезу о структуре ящика**

Рассматривая экспериментально полученные данные, предположим, что они подчиняются линейной гипотезе, то есть выход *Y* зависит от входа *X* линейно, то есть гипотеза имеет вид:  (рис. 5.2**).**

**2) Определение неизвестных коэффициентов *A*0 и *A*1 модели**

Линейная одномерная модель (рис. 5.3).

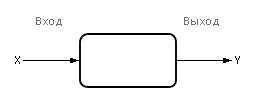


Рис. 5.3. Одномерная модель черного ящика

Для каждой из  снятых экспериментально точек вычислим ошибку  между экспериментальным значением и теоретическим значением , лежащим на гипотетической прямой  (см. рис. 5.2):

**

**

Ошибки  для всех  точек следует сложить. Чтобы положительные ошибки не компенсировали в сумме отрицательные, каждую из ошибок возводят в квадрат и складывают их значения в суммарную ошибку  уже одного знака:

**

**

Цель метода — минимизация суммарной ошибки  за счет подбора коэффициентов. Другими словами, это означает, что необходимо найти такие коэффициенты  линейной функции , чтобы ее график проходил как можно ближе одновременно ко всем экспериментальным точкам. Поэтому данный метод называется **методом наименьших квадратов**.



Суммарная ошибка  является функцией двух переменных  и , то есть , меняя которые, можно влиять на величину суммарной ошибки (см. рис. 5.4).

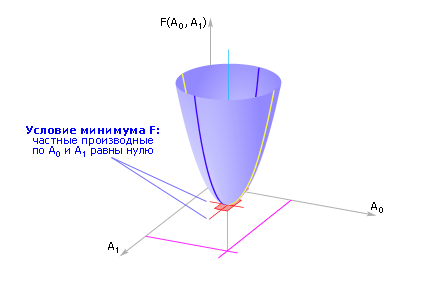


Рис. 5.4. Примерный вид функции ошибки

Чтобы суммарную ошибку минимизировать, найдем частные производные от функции  по каждой переменной и приравняем их к нулю (условие экстремума):





После раскрытия скобок получим систему из двух линейных уравнений:





Для нахождения коэффициентов  и  методом Крамера представим систему в матричной форме:



Решение имеет вид:





Вычисляем значения  и .

**3) Проверка**

Чтобы определить, принимается гипотеза или нет, нужно, во-первых, рассчитать ошибку между точками заданной экспериментальной и полученной теоретической зависимости и суммарную ошибку:





И, во-вторых, необходимо найти значение  по формуле , где  — суммарная ошибка,  — общее число экспериментальных точек.

Если в полосу, ограниченную линиями  и (рис. 5.5), попадает 68.26% и более экспериментальных точек , то выдвинутая нами гипотеза принимается. В противном случае выбирают более сложную гипотезу или проверяют исходные данные. Если требуется б**о**льшая уверенность в результате, то используют дополнительное условие: в полосу, ограниченную линиями  и , должны попасть 95.44% и более экспериментальных точек .

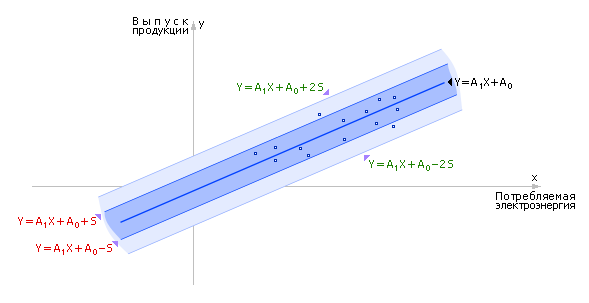


Рис. 5.5. Исследование допустимости принятия гипотезы

Расстояние  связано с  следующим соотношением:

**

что проиллюстрировано на рис. 5.6**.**

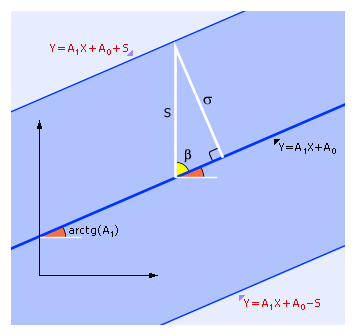


Рис. 5.6. Связь значений σ и S

Условие принятия гипотезы выведено из нормального закона распределения случайных ошибок (см. рис. 5.7).  — вероятность распределения нормальной ошибки.

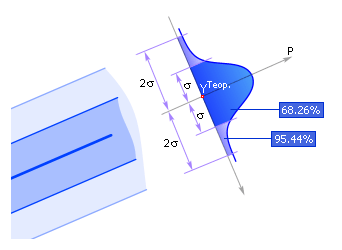


Рис. 5.7. Иллюстрация закона нормального распределения ошибок

## Линейная множественная модель

Предположим, что функциональная структура ящика снова имеет линейную зависимость, но количество входных сигналов, действующих одновременно на объект, равно  (см. рис. 5.8):



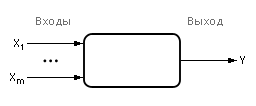


Рис. 5.8. Обозначение многомерного черного ящика на схемах

Так как подразумевается, что мы имеем экспериментальные данные о всех входах и выходах черного ящика, то можно вычислить ошибку между экспериментальным  и теоретическим  значением  для каждой -ой точки (пусть, как и прежде, число экспериментальных точек равно ):





Минимизируем суммарную ошибку :



Ошибка  зависит от выбора параметров **. Для нахождения экстремума приравняем все частные производные  по неизвестным  к нулю:



Получим систему из  уравнения с  неизвестными, которую следует решить, чтобы определить коэффициенты линейной множественной модели . Для нахождения коэффициентов методом Крамера представим систему в матричном виде:



Вычисляем коэффициенты .

Далее, по аналогии с одномерной моделью, для каждой точки вычисляется ошибка ; затем находится суммарная ошибка  и значения  и  с целью определить, принимается ли выдвинутая гипотеза о линейности многомерного черного ящика или нет.

При помощи подстановок и переобозначений к линейной множественной модели приводятся многие нелинейные модели.

# Лекция 6. Нелинейные регрессионные модели

Полиномиальная множественная регрессионная модель

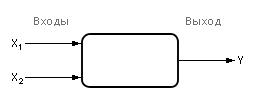


Рис. 6.1. Обозначение двумерной модели черного ящика на схемах

Если черный ящик имеет, например, два входа, а зависимость выхода от входов напоминает квадратичную, то целесообразно выбрать такую гипотезу:



Обозначим:    и подставим эти выражения в предыдущую формулу:



Таким образом, данная задача сведена к линейной множественной модели. А модель черного ящика теперь выглядит так, как показано на рис. 6.2.

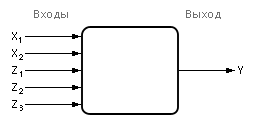


Рис. 6.2. Преобразованная модель черного ящика

## Мультипликативная регрессионная модель

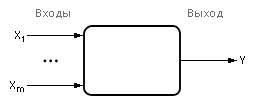


Рис. 6.3. Обозначение модели многомерного черного ящика на схемах



Прологарифмируем левую и правую части данного уравнения:



Обозначим:

Получим:

То есть вновь осуществлен переход к линейной множественной модели.

## 

## Обратная регрессионная модель

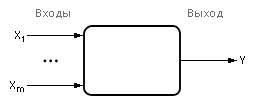


Рис. 6.4. Обозначение модели многомерного черного ящика на схемах

Заменим: и перейдем к линейной множественной модели:

## Экспоненциальная модель

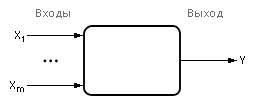


Рис. 6.5. Обозначение модели многомерного черного ящика на схемах



Прологарифмируем левую и правую части уравнения:

Выполним замену и получим:

Далее пользуемся выражением для линейной множественной модели.

# Лекция 7. Динамические системы

На предыдущих лекциях мы рассматривали статические модели, то есть случай, когда один эксперимент не зависит от другого. Можно сказать, что система не обладала памятью. То есть, в какой бы момент времени мы ни измеряли значение выходной величины, при одинаковом значении входного сигнала результат был один и тот же. Если каждый раз значение на выходе, при одном и том же входном значении, разное, то есть зависит от того, в какой последовательности подавались входные значения, то мы имеем дело с динамической системой.

Динамические системы, в отличие от статических, помнят свое прошлое состояние, то есть обладают памятью. Поэтому в записи модели динамических систем присутствует производная, связывающая прошлое состояние системы с настоящим. Чем большей памятью обладает система, тем больше состояний из прошлого влияют на настоящее, тем большая степень старшей производной используется в записи модели. В данной лекции рассматриваются динамические системы.

Задача 1. На входе и выходе черного ящика (рис. 7.1) имеются зависимости параметров X и Y от времени t. Задача состоит в том, чтобы адекватно определить черный ящик.

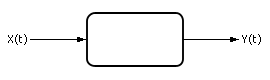


Рис. 7.1. Черный ящик, содержащий динамическую систему. Условное обозначение

Графики зависимостей X(t) и Y(t) могут быть самыми разными, например, такими, как показано на рис. 7.2.

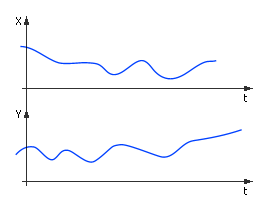


Рис. 7.2. Временные зависимости —входной и выходной сигналы

Поскольку моделирование систем подразумевает численные расчеты на компьютере, то аналоговый сигнал переводят в дискретный вид. Для этого с определенной частотой исходный сигнал дискретизируют, как показано на рис. 7.3.

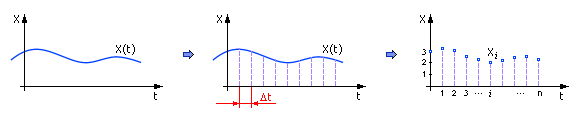


Рис. 7.3. Дискретизированный временной сигнал

По этим данным строят таблицу отсчетов (см. табл. 7.1, где Δt = 0.1). Таблица 7.1.

Табличное представление временного сигнала

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | … | i | … | n |
| t | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | … | Δt · i | … | Δt · n |
| xi | 3 | 3.2 | 3.1 | 2.6 | … | xi | … | xn |

Совокупность значений переменной в таблице, упорядоченных во времени, часто называют динамическим рядом. Естественно, часть информации при такой операции теряется. Чем меньше расстояние между отсчетами, чем больше частота дискретизации, тем меньше потери информации. Частоту дискретизации принимают такой, чтобы не потерять высокочастотные составляющие в сигнале, отдельные пики.

Любая динамическая система характеризуется рядом параметров. Обычно (чаще всего) параметрами называют коэффициенты при производных (первой, второй и т. д.) в записи модели. Чем большая степень старшей производной присутствует в записи модели, тем больший порядок динамической системы, тем глубже ее память, и тем больше коэффициентов (параметров) надо определить, чтобы идентифицировать систему.

Как определить параметры динамической системы? Сначала нужно оценить порядок динамической системы: он совпадает со степенью наибольшей из производных Y по отношению к t. Допустим, что на вход системы, до этого находившейся в нулевых начальных условиях, подали единичный сигнал X(t), как показано на рис. 7.4.

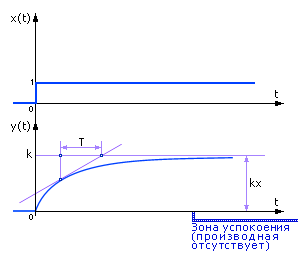


Рис. 7.4. Входной и выходной сигнал, типичный для системы первого порядка

Поясним смысл графика. При нулевых начальных условиях, если входной сигнал отсутствует, выходной сигнал равен нулю, и говорят, что система находится в покое. Если подать на вход единичный (пробный) сигнал и удерживать его на входе достаточно долго, то система на выходе попытается подчиниться ему, начнет отклоняться от нулевого состояния. Ожидается, что система на выходе должна дойти до значения k\*x, то есть увеличить сигнал x в k раз (k — коэффициент усиления входного сигнала). Но, как видно, происходит это не сразу, а с некоторой задержкой, сигнал на выходе нарастает постепенно, инерционно. Насколько инерционно реагирует система, зависит от параметра T. Система достигнет значения k\*x на выходе и будет держать этот сигнал, пока держится на входе единичный сигнал. Переход от нуля до k\*x происходит во времени. Переход — процесс динамический, то есть в сигнале присутствует изменение, которое описывается производной, и выход оказывается меньше входа на некоторую величину f:

Когда система достигнет на выходе значения равного k\*x, то изменений не будет, значение производной станет равной нулю. y = kx.

— частный случай инерционного звена.

Если на выходе будет наблюдаться экспоненциальный сигнал, то система будет называться системой первого порядка (или звеном первого порядка). Для ее описания достаточно одной производной (а в решении модели будет присутствовать один интеграл):



У такой системы два параметра — T и k.

Заметим, что один интеграл у линейных динамических систем всегда «порождает» одну экспоненту, двойной интеграл — сумму двух экспонент, и так далее.

Чтобы определить, является ли кривая экспонентой, в каждой ее точке проводится касательная до пересечения с линией установившегося уровня (на рис. 7.4 это линия y(t) = k; в случае, если кривая является экспонентой, величина T в любой точке будет постоянной.

Определить T, используя график, можно еще так. Проведите линию, параллельную оси t на уровне 0.95\*k. Из точки, где эта линия пересечет экспоненту, опустите перпендикуляр на ось t. Отрезок от 0 до точки пересечения перпендикуляра с осью t будет равен 3\*T.

T характеризует инерционность системы (память). При малой величине T система слабо зависит от предыстории и вход мгновенно заставляет измениться выход. При большом значении T система медленно реагирует на входной сигнал, а при очень большом значении T система выдает неизменный выходной сигнал, практически не реагируя на входные воздействия.

Коэффициент k характеризует способность системы к усилению (при k < 1 — к ослаблению) уровня входного сигнала. Чтобы определить коэффициент k на графике, достаточно дождаться успокоения сигнала на выходе системы и вычислить отношение уровня выходного сигнала к уровню входного. Математически это означает, что все слагаемые, содержащие производные, равны нулю (система успокоилась, движения нет), а оставшееся слагаемое Y = k · X определяет значение k.

## Звено первого порядка

Звено первого порядка обладает двумя параметрами: инерционностью T и коэффициентом усиления .

Чем больше производных учитывается в записи модели, тем со звеном большего порядка мы имеем дело, тем больше коэффициентов при производных следует определить.

Введем понятие передаточной функции как модели динамической системы. По определению передаточная функция — это отношение выхода ко входу:

Передаточная функция звена первого порядка имеет вид:

где «p» — символ дифференцирования, тождественно равный «». Символ «p» также называется алгебраизованным оператором дифференцирования. Тогда, используя определение передаточной функции, имеем:

Далее получим:

или

или

В разностном виде уравнение можно записать как



Или, выразив настоящее через прошедшее:

Здесь и — весовые коэффициенты. A указывает на вес компоненты X, определяющей влияние внешнего мира на систему, B указывает на вес компоненты Y, определяющей память системы, влияние на ее поведение истории.

В частности, если , то , и мы имеем дело с безынерционной системой , мгновенно реагирующей на входной сигнал и увеличивающей его в k раз.

Если коэффициент , то есть или , то получаем, что коэффициент и, следовательно, . При постоянном (единичном) входном сигнале X будет получен график, как на рис. 7.5.

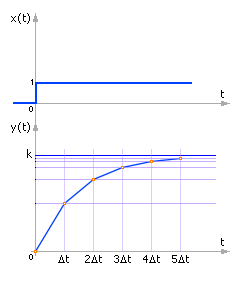


Рис. 7.5. Реакция звена первого порядка на единичный входной сигнал для дискретного случая

Экспонента, изображенная на графике, при большом n (в пределе n = ∞) стремится к значению входного (единичного) сигнала X, умноженного на коэффициент усиления k, что подтверждается расчетом:

Напомним, что выражение является геометрической прогрессией, сумма которой при n = ∞ равна 1. А стоящее при выражение обращается в 0 при n = ∞.

Если еще усилить влияние прошлого (B = 1), то система начнет интегрировать саму себя (выход подан на вход системы), добавляя все время входной сигнал, что соответствует экспоненциальному неограниченному росту выходного сигнала: . По смыслу это соответствует положительной обратной связи. При B = –1 имеем модель: , по смыслу соответствующую отрицательной обратной связи. При определении модели требуется найти неизвестные коэффициенты k и T.

## Звено второго порядка (колебательное звено)

Такие звенья описываются дифференциальным уравнением вида:

Если на вход звена подать единичную функцию Хэвисайда от времени 1[t], при нулевых начальных условиях системы, то реакция на выходе будет называться переходной функцией (или переходной характеристикой), которую часто обозначают как h(t). Сигнал 1[t] — это, в некотором смысле, эталонный испытательный сигнал. Существуют и другие эталонные испытательные сигналы. Например, бесконечный импульс нулевой длины (дельта-функция Дирака), гармонический сигнал, периодические прямоугольные импульсы.

Преобразуем по Лапласу это уравнение:

или, иначе:

Определим передаточную функцию звена:

Если записать уравнение без входного воздействия (нулевые входные воздействия U = 0) и сократить Y, то есть: , то такое уравнение будет называться характеристическим, поскольку характеризует исключительно внутренние свойства звена. Обратите внимание, что в записи звена содержатся три параметра:

T — постоянная времени (в секундах);

ξ — коэффициент затухания (безразмерная величина);

k — передаточный коэффициент.

В зависимости от величины ξ звенья второго порядка классифицируются по видам:

ξ = 0 — консервативное звено второго порядка;

0 < ξ < 1 — колебательное звено второго порядка;

ξ ≥ 1 — апериодическое звено второго порядка.

## Апериодическое звено 2-го порядка (ξ ≥ 1)

Характеристическое уравнение звена следующее:

И оно имеет действительные отрицательные корни:

Данное звено можно представить в виде последовательно соединенных звеньев с различными постоянными времени:

Тогда при T1 > T2 переходная характеристика звена имеет вид:

То есть, в решении присутствуют затухающие экспоненты. Типичное поведение звена с такими параметрами показано на рис. 7.6.

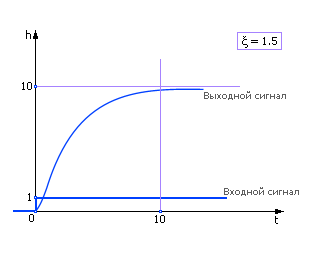


Рис. 7.6. Реакция апериодического звена на единичный входной сигнал

В частном случае, когда ξ = 1, оба корня будут одинаковыми, отрицательными:

## Колебательное звено 2-го порядка (0 < ξ < 1)

Характеристическое уравнение звена следующее:

Корни разные, комплексно-сопряженные, с отрицательной вещественной частью:

, где , .

Так как корни мнимые, то в поведении звена присутствует колебательная составляющая. Именно за эту особенность поведения звено получило название колебательного (см. рис. 7.7 и рис. 7.8).

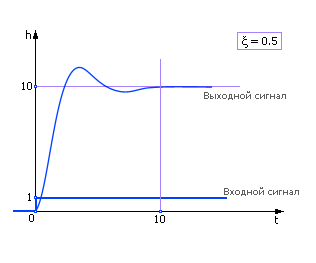


Рис. 7.7. Реакция колебательного звена на входной единичный сигнал (ξ = 0.5)

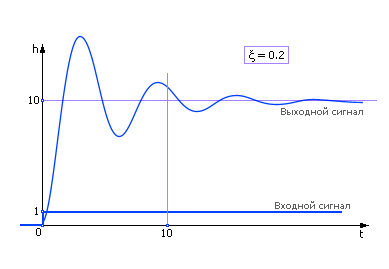


Рис. 7.8. Реакция колебательного звена на входной единичный сигнал (ξ = 0.2)

Из графиков видно, что с ростом ξ колебательность звена уменьшается, исчезая при ξ ≥ 1

Переходная функция звена имеет вид:



где

При малых ξ значение A приближается к 1, а значение φ — к 90°. По физическому смыслу ω0 представляет собой собственную частоту колебаний.

## Консервативное звено 2-го порядка (ξ = 0)

Характеристическое уравнение звена следующее:

Корни одинаковые, комплексно-сопряженные, с нулевой вещественной частью:



Так как корни чисто мнимые, то поведением звена являются незатухающие колебания (ξ = 0), см. рис. 7.9.

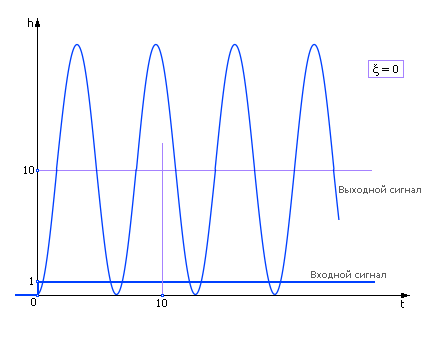


Рис. 7.9. Реакция колебательного звена на входной единичный сигнал 

Переходная функция звена имеет вид: .

Из графика экспериментальным путем можно определить единственный параметр 

# Лекция 8. Статистическое моделирование

**Статистическое моделирование** — базовый метод моделирования, заключающийся в том, что модель испытывается множеством случайных сигналов с заданной плотностью вероятности. Целью является статистическое определение выходных результатов. В основе статистического моделирования лежит *метод Монте-Карло*. Напомним, что имитацию используют тогда, когда другие методы применить невозможно.

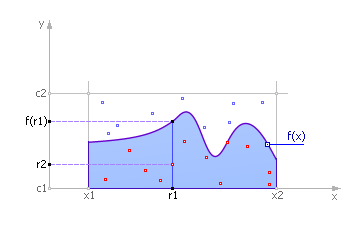
## Метод Монте-Карло

Рассмотрим метод Монте-Карло на примере вычисления интеграла, значение которого аналитическим способом найти не удается.

Задача 1. Найти значение интеграла:

****

На рис. 8.1 представлен график функции . Вычислить значение интеграла этой функции — значит, найти площадь под этим графиком.



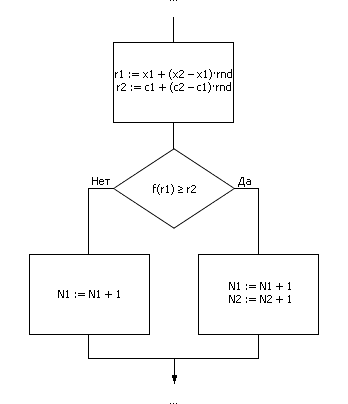
**Рис. 8.1. Определение значения интеграла**  
**методом Монте-Карло**

Ограничиваем кривую сверху, справа и слева. Случайным образом распределяем точки в прямоугольнике поиска. Обозначим через количество точек, принятых для испытаний (то есть попавших в прямоугольник, эти точки изображены на рис. 8.1 красным и синим цветом), и через  — количество точек под кривой, то есть попавших в закрашенную площадь под функцией (эти точки изображены на рис. 8.1 красным цветом). Тогда естественно предположить, что количество точек, попавших под кривую по отношению к общему числу точек пропорционально площади под кривой (величине интеграла) по отношению к площади испытуемого прямоугольника. Математически это можно выразить так:



Рассуждения эти, конечно, статистические и тем более верны, чем большее число испытуемых точек мы возьмем.

Фрагмент алгоритма метода Монте-Карло в виде блок-схемы выглядит так, как показано на рис. 8.2.



**Рис. 8.2. Фрагмент алгоритма реализации**  
**метода Монте-Карло**

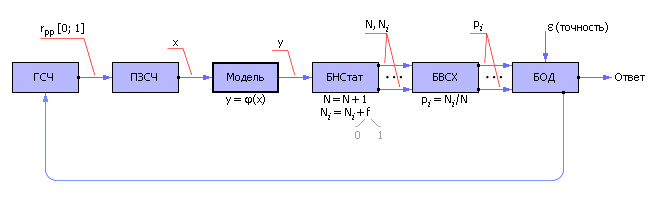
Значения  и  на рис. 8.2 являются равномерно распределенными случайными числами из интервалов и  соответственно.

Метод Монте-Карло чрезвычайно эффективен, прост, но необходим «хороший» генератор случайных чисел. Вторая проблема применения метода заключается в определении объема выборки, то есть количества точек, необходимых для обеспечения решения с заданной точностью. Эксперименты показывают: чтобы увеличить точность в 10 раз, объем выборки нужно увеличить в 100 раз; то есть точность примерно пропорциональна корню квадратному из объема выборки:



## Схема использования метода Монте-Карло при исследовании систем со случайными параметрами

Построив модель системы со случайными параметрами, на ее вход подают входные сигналы от генератора случайных чисел (ГСЧ), как показано на рис. 8.3. ГСЧ устроен так, что он выдает *равномерно распределенные* случайные числа из интервала . Так как одни события могут быть более вероятными, другие — менее вероятными, то равномерно распределенные случайные числа от генератора подают на преобразователь закона случайных чисел (ПЗСЧ), который преобразует их в *заданный* пользователем закон распределения вероятности, например, в нормальный или экспоненциальный закон. Эти преобразованные случайные числа  подают на вход модели. Модель отрабатывает входной сигнал  по некоторому закону  и получает выходной сигнал , который также является случайным.



**Рис. 8.3. Общая схема метода статистического моделирования**

В блоке накопления статистики (БНСтат) установлены фильтры и счетчики. Фильтр (некоторое логическое условие) определяет по значению , реализовалось ли в конкретном опыте некоторое событие (выполнилось условие, ) или нет (условие не выполнилось, ). Если событие реализовалось, то счетчик события увеличивается на единицу. Если событие не реализовалось, то значение счетчика не меняется. Если требуется следить за несколькими разными типами событий, то для статистического моделирования понадобится несколько фильтров и счетчиков . Всегда ведется счетчик количества экспериментов — .

Далее отношение  к , рассчитываемое в блоке вычисления статистических характеристик (БВСХ) по методу Монте-Карло, дает оценку вероятности  появления события , то есть указывает на частоту его выпадения в серии из  опытов. Это позволяет сделать выводы о статистических свойствах моделируемого объекта.

Например, событие  совершилось в результате проведенных 200 экспериментов 50 раз. Это означает, согласно методу Монте-Карло, что вероятность совершения события равна: . Вероятность того, что событие не совершится, равна, соответственно, 1 – 0.25 = 0.75.

**Обратите внимание:** когда говорят о вероятности, полученной экспериментально, то ее называют **частостью**; слово **вероятность** употребляют, когда хотят подчеркнуть, что речь идет о теоретическом понятии.

При большом количестве опытов  частота появления события, полученная экспериментальным путем, стремится к значению теоретической вероятности появления события.

В блоке оценки достоверности (БОД) анализируют степень достоверности статистических экспериментальных данных, снятых с модели (принимая во внимание точность результата , заданную пользователем) и определяют необходимое для этого количество статистических испытаний. Если колебания значений частоты появления событий относительно теоретической вероятности меньше заданной точности, то экспериментальную частоту принимают в качестве ответа, иначе генерацию случайных входных воздействий продолжают, и процесс моделирования повторяется. При малом числе испытаний результат может оказаться недостоверным. Но чем более испытаний, тем точнее ответ, согласно центральной предельной теореме.

Заметим, что оценивание ведут по худшей из частот. Это обеспечивает достоверный результат сразу по всем снимаемым характеристикам модели.

**Пример 1**. Решим простую задачу. Какова вероятность выпадения монеты орлом кверху при падении ее с высоты случайным образом?

Начнем подбрасывать монетку и фиксировать результаты каждого броска (см. табл. 8.1).

|  |
| --- |
| Таблица 21.1. Результаты испытаний бросания монеты |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | **Количество опытов** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | | **Значение счетчика выпадения орла** | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | … | … | … | … | … | … | … | | **Значение счетчика выпадения решки** | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | … | … | … | … | … | … | … | | **Частость выпадения орла** | 0 | 0 | 0.33 | 0.25 | 0.4 | 0.5 | 0.57 | … | … | … | … | … | … | … | | **Частость выпадения решки** | 1 | 1 | 0.66 | 0.75 | 0.6 | 0.5 | 0.43 | … | … | … | … | … | … | … | |

Будем подсчитывать частость выпадения орла как отношение количества случаев выпадения орла к общему числу наблюдений. Посмотрите в табл. 8.1. случаи для , ,  — сначала значения частости нельзя назвать достоверными. Попробуем построить график зависимости  от  — и посмотрим, как меняется частость выпадения орла в зависимости от количества проведенных опытов. Разумеется, при различных экспериментах будут получаться разные таблицы и, следовательно, разные графики. На рис. 8.4 показан один из вариантов.

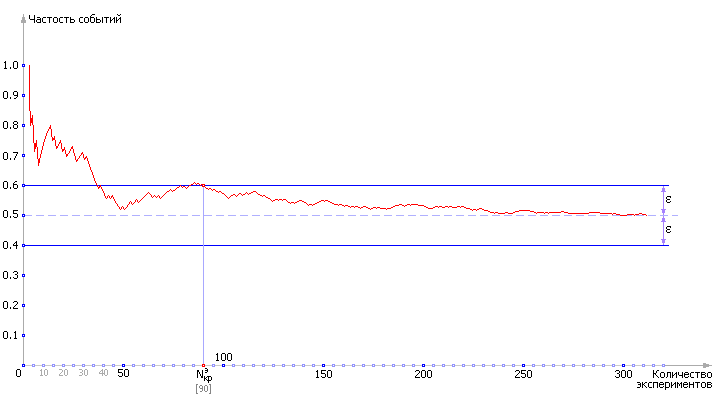


Рис. 8.4. Экспериментальная зависимость частости появления случайного событияот количества наблюдений и ее стремление к теоретической вероятности

Сделаем некоторые выводы.

1. Видно, что при малых значениях , например, , ,  ответу вообще доверять нельзя. Например,  при , то есть вероятность выпадения орла при одном броске равна нулю! Хотя всем хорошо известно, что это не так. То есть пока мы получили очень грубый ответ. Однако, посмотрите на график: в процессе накопления информации ответ медленно, но верно приближается к правильному (он выделен пунктирной линией). К счастью, в данном конкретном случае правильный ответ нам известен: в идеале, вероятность выпадения орла равна 0.5 (в других, более сложных задачах, ответ нам, конечно, будет неизвестен). Допустим, что ответ нам надо знать с точностью . Проведем две параллельные линии, отстоящие от правильного ответа 0.5 на расстояние 0.1 (см. рис. 8.4). Ширина образовавшегося коридора будет равна 0.2. Как только кривая  войдет в этот коридор так, что уже никогда его не покинет, можно остановиться и посмотреть, для какого значения  это произошло. Это и есть экспериментально вычисленное критическое значение необходимого количества опытов  для определения ответа с точностью ; -окрестность в наших рассуждениях играет роль своеобразной трубки точности. Заметьте, что ответы ,  и так далее уже не меняют сильно своих значений (см. рис. 8.4); по крайней мере, у них не изменяется первая цифра после запятой, которой мы обязаны доверять по условиям задачи.
2. Причиной такого поведения кривой является действие центральной предельной теоремы. Пока здесь мы сформулируем ее в самом простом варианте «Сумма случайных величин есть величина неслучайная». Мы использовали среднюю величину , которая несет в себе информацию о сумме опытов, и поэтому постепенно эта величина становится все более достоверной.
3. Если проделать еще раз этот опыт сначала, то, конечно, его результатом будет другой вид случайной кривой. И ответ будет другим, хотя примерно таким же. Проведем целую серию таких экспериментов (см. рис. 8.5). Такая серия называется **ансамблем реализаций**. Какому же ответу в итоге следует верить? Ведь они, хоть и являются близкими, все же разнятся. На практике поступают по-разному. Первый вариант — вычислить среднее значение ответов за несколько реализаций (см. табл. 8.2).

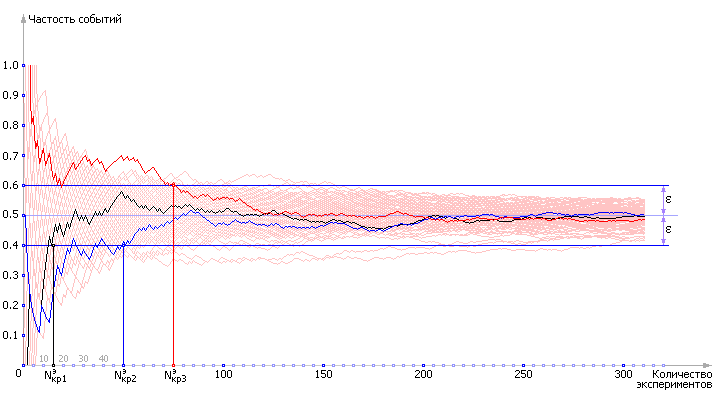


Рис. 8.5. Экспериментально снятый ансамбль случайных зависимостейчастости появления случайного события от количества наблюдений

Мы поставили несколько экспериментов и определяли каждый раз, сколько необходимо было сделать опытов, то есть . Было проделано 10 экспериментов, результаты которых были сведены в табл. 8.2. По результатам 10-ти экспериментов было вычислено среднее значение .

|  |
| --- |
| Таблица 8.2. Экспериментальные данные необходимого количества бросков монеты для достижения точности  при вычислении вероятности выпадения орла |
| |  |  | | --- | --- | | **Опыт** |  | | 1 | 288 | | 2 | 95 | | 3 | 50 | | 4 | 29 | | 5 | 113 | | 6 | 210 | | 7 | 30 | | 8 | 42 | | 9 | 39 | | 10 | 48 | | **Среднее** | **94** | |

Таким образом, проведя 10 реализаций разной длины, мы определили, что достаточно в среднем было сделать 1 реализацию длиной в 94 броска монеты.

Еще один важный факт. Внимательно рассмотрите график на рис. 8.5. На нем нарисовано 100 реализаций — 100 красных линий. Отметьте на нем абсциссу  вертикальной чертой. Есть какой-то процент красных линий, которые не успели пересечь -окрестность, то есть , и войти в коридор точности до момента . Обратите внимание, таких линий 5. Это значит, что 95 из 100, то есть 95%, линий достоверно вошли в обозначенный интервал.

Таким образом, проведя 100 реализаций, мы добились примерно 95%-ного доверия к полученной экспериментально величине вероятности выпадения орла, определив ее с точностью 0.1. Для сравнения полученного результата вычислим теоретическое значение  теоретически. Однако для этого придется ввести понятие доверительной вероятности , которая показывает, насколько мы готовы верить ответу. Например, при  мы готовы верить ответу в 95% случаев из 100. Формула теоретического расчета числа экспериментов имеет вид: , где  — коэффициент Лапласа,  — вероятность выпадения орла,  — точность (доверительный интервал). В табл. 8.3 показаны значения теоретической величины количества необходимых опытов при разных  (для точности  и вероятности ).

|  |
| --- |
| Таблица 8.3. Теоретический расчет необходимого количества бросков монеты для достижения точности  при вычислении вероятности выпадения орла |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Доверительная вероятность** | **Коэффициент Лапласа** | **Требуемое число опытов** | | 0.90 | 2.72 | 68 | | 0.95 | 3.84 | 96 | | 0.99 | 6.66 | 167 | |

Как видите, полученная нами оценка длины реализации, равная 94 опытам очень близка к теоретической, равной 96. Некоторое несовпадение объясняется тем, что, видимо, 10 реализаций недостаточно для точного вычисления. Если вы решите, что вам нужен результат, которому следует доверять больше, то измените значение доверительной вероятности. Например, теория говорит нам, что если опытов будет 167, то всего 1-2 линии из ансамбля не войдут в предложенную трубку точности. Но имейте в виду, количество экспериментов с ростом точности и достоверности растет очень быстро.

Второй вариант, используемый на практике — провести одну реализацию и увеличить полученное для нее  в 2 раза. Это считают хорошей гарантией точности ответа (см. рис. 8.6).

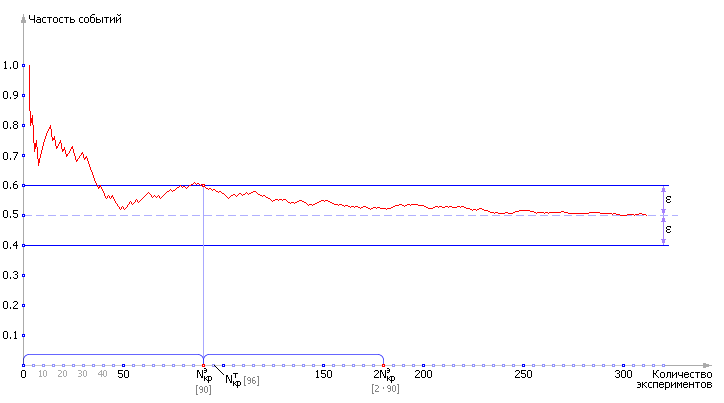


Рис. 8.6. Иллюстрация экспериментального определения  по правилу «умножь на два»

Если присмотреться к ансамблю случайных реализаций, то можно обнаружить, что сходимость частости к значению теоретической вероятности происходит по кривой, соответствующей обратной квадратичной зависимости от числа экспериментов (см. рис. 8.7).

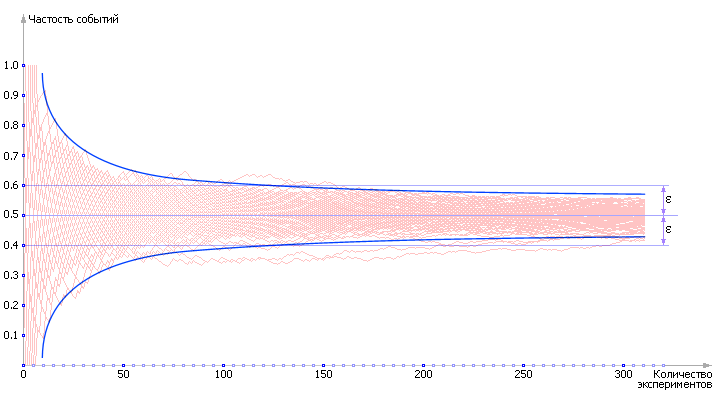


Рис. 8.7. Иллюстрация скорости схождения экспериментально получаемой частостик теоретической вероятности

Это действительно так получается и теоретически. Если изменять задаваемую точность  и исследовать количество экспериментов, требуемых для обеспечения каждой из них, то получится табл. 8.4.

|  |
| --- |
| Таблица 8.4. Теоретическая зависимость количества экспериментов, необходимых для обеспечения заданной точности при |
| |  |  | | --- | --- | | **Точность** | **Критическое число экспериментов** | | 0.1 | 96 | | 0.01 | 9600 | | 0.001 | 960000 | |

Построим по табл. 8.4 график зависимости  (см. **рис. 8.8**).

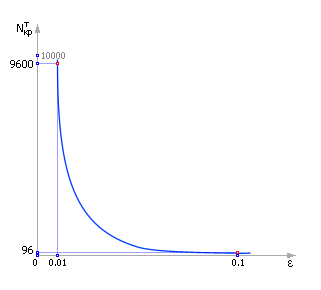


Рис. 8.8. Зависимость числа экспериментов, требуемых для достижениязаданной точности ε при фиксированном 

Итак, рассмотренные графики подтверждают приведенную выше оценку:



Заметим, что оценок точности может быть несколько.

**Пример 2. Нахождение площади фигуры методом Монте-Карло**. Определите методом Монте-Карло площадь пятиугольника с координатами углов (0, 0), (0, 10), (5, 20), (10, 10), (7, 0).

Нарисуем в двухмерных координатах заданный пятиугольник, вписав его в прямоугольник, чья площадь, как нетрудно догадаться, составляет (10 – 0) · (20 – 0) = 200 (см. рис. 8.9).

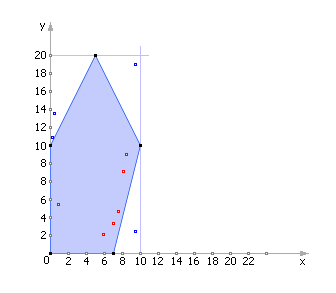


Рис. 8.9. Иллюстрация к решению задачио площади фигуры методом Монте-Карло

Используем таблицу случайных чисел для генерации пар чисел R, G, равномерно распределенных в интервале от 0 до 1. Число R будет имитировать координату X (0 ≤ X ≤ 10), следовательно, X = 10 · R. Число G будет имитировать координату Y (0 ≤ Y ≤ 20), следовательно, Y = 20 · G. Сгенерируем по 10 чисел R и G и отобразим 10 точек (X; Y) на рис. 8.9 и в табл. 8.5.

|  |
| --- |
| Таблица 8.5. Решение задачи методом Монте-Карло |
| |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | **Номер точки** | **R** | **G** | **X** | **Y** | **Точка (X; Y) попала в прямоугольник?** | **Точка (X; Y) попала в пятиугольник?** | | 1 | 0.8109 | 0.3557 | 8.109 | 7.114 | Да | Да | | 2 | 0.0333 | 0.5370 | 0.333 | 10.740 | Да | Нет | | 3 | 0.1958 | 0.2748 | 1.958 | 5.496 | Да | Да | | 4 | 0.6982 | 0.1652 | 6.982 | 3.304 | Да | Да | | 5 | 0.9499 | 0.1090 | 9.499 | 2.180 | Да | Нет | | 6 | 0.7644 | 0.2194 | 7.644 | 4.388 | Да | Да | | 7 | 0.8395 | 0.4510 | 8.395 | 9.020 | Да | Да | | 8 | 0.0415 | 0.6855 | 0.415 | 13.710 | Да | Нет | | 9 | 0.5997 | 0.1140 | 5.997 | 2.280 | Да | Да | | 10 | 0.9595 | 0.9595 | 9.595 | 19.190 | Да | Нет | | **Всего:** | | | | | 10 | 6 | |

Статистическая гипотеза заключается в том, что количество точек, попавших в контур фигуры, пропорционально площади фигуры: 6:10 = S:200. То есть, по формуле метода Монте-Карло, получаем, что площадь S пятиугольника равна: 200 · 6/10 = 120.

Проследим, как менялась величина S от опыта к опыту (см. табл. 8.6).

|  |
| --- |
| Таблица 8.6. Оценка точности ответа |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Количество испытаний N** | **Оценка вероятности попадания случайной точки в испытуемую область** | **Оценка площади S методом Монте-Карло** | | 1 | 1/1 = 1.00 | 200 | | 2 | 1/2 = 0.50 | 100 | | 3 | 2/3 = 0.67 | 133 | | 4 | 3/4 = 0.75 | 150 | | 5 | 3/5 = 0.60 | 120 | | 6 | 4/6 = 0.67 | 133 | | 7 | 5/7 = 0.71 | 143 | | 8 | 5/8 = 0.63 | 125 | | 9 | 6/9 = 0.67 | 133 | | 10 | 6/10 = 0.60 | 120 | |

Поскольку в ответе все еще меняется значение второго разряда, то возможная неточность составляет пока больше 10%. Точность расчета может быть увеличена с ростом числа испытаний (см. рис. 8.10).

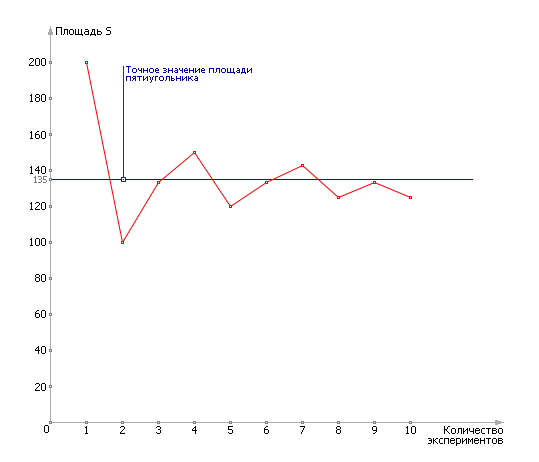


Рис. 8.10. Иллюстрация процесса сходимости определяемогоэкспериментально ответа к теоретическому результату

# Лекция 9. Генераторы случайных чисел

В основе метода Монте-Карло (см. [Лекцию 8. Статистическое моделирование](file:///F:\Обучение\Математическое%20моделирование%20(лекции)\www.stratum.ac.ru\textbooks\modelir\lection21.html)) лежит генерация случайных чисел, которые должны быть равномерно распределены в интервале (0; 1).

Если генератор выдает числа, смещенные в какую-то часть интервала (одни числа выпадают чаще других), то результат решения задачи, решаемой статистическим методом, может оказаться неверным. Поэтому проблема использования хорошего генератора действительно случайных и действительно равномерно распределенных чисел стоит очень остро.

Математическое ожидание  и дисперсия  такой последовательности, состоящей из  случайных чисел , должны быть следующими (если это действительно равномерно распределенные случайные числа в интервале от 0 до 1):





Если пользователю потребуется, чтобы случайное число *x* находилось в интервале (*a*; *b*), отличном от (0; 1), нужно воспользоваться формулой *x* = *a* + (*b* – *a*) · *r*, где *r* — случайное число из интервала (0; 1). Законность данного преобразования демонстрируется на рис. 9.1**.**

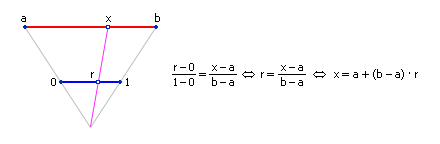


Рис. 9.1. Схема перевода числа из интервала (0; 1) в интервал (a; b)

Теперь *x* — случайное число, равномерно распределенное в диапазоне от *a* до *b*.

За **эталон генератора случайных чисел** (ГСЧ) принят такой генератор, который порождает **последовательность** случайных чисел с равномерным законом распределения в интервале (0; 1). За одно обращение данный генератор возвращает одно случайное число. Если наблюдать такой ГСЧ достаточно длительное время, то окажется, что, например, в каждый из десяти интервалов (0; 0.1), (0.1; 0.2), (0.2; 0.3), …, (0.9; 1) попадет практически одинаковое количество случайных чисел — то есть они будут распределены равномерно по всему интервалу (0; 1). Если изобразить на графике *k* = 10 интервалов и частоты *Ni* попаданий в них, то получится экспериментальная кривая плотности распределения случайных чисел (см. рис. 9.2).

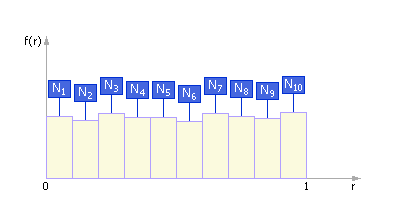


Рис. 9.2. Частотная диаграмма выпадения случайных чисел,порождаемых реальным генератором

Заметим, что в идеале кривая плотности распределения случайных чисел выглядела бы так, как показано на рис. 9.3. То есть в идеальном случае в каждый интервал попадает одинаковое число точек: *Ni* = *N*/*k*, где *N* — общее число точек, *k* — количество интервалов, *i* = 1, …, *k*.

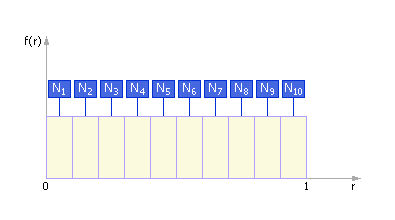


Рис. 9.3. Частотная диаграмма выпадения случайных чисел,порождаемых идеальным генератором теоретически

Следует помнить, что генерация произвольного случайного числа состоит из двух этапов:

* генерация нормализованного случайного числа (то есть равномерно распределенного от 0 до 1);
* преобразование нормализованных случайных чисел *ri* в случайные числа *xi*, которые распределены по необходимому пользователю (произвольному) закону распределения или в необходимом интервале.

Генераторы случайных чисел по способу получения чисел делятся на:

* физические;
* табличные;
* алгоритмические.

## Физические ГСЧ

Примером физических ГСЧ могут служить: монета («орел» — 1, «решка» — 0); игральные кости; поделенный на секторы с цифрами барабан со стрелкой; аппаратурный генератор шума (ГШ), в качестве которого используют шумящее тепловое устройство, например, транзистор (рис. 9.4–9.5).



Рис. 9.4. Схема аппаратного метода генерации случайных чисел

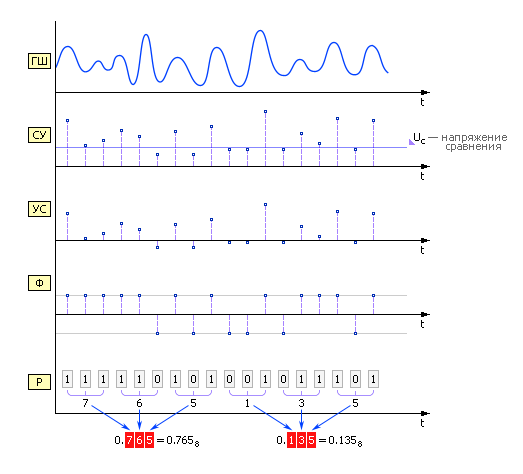


Рис. 9.5. Диаграмма получения случайных чисел аппаратным методом

Задача «Генерация случайных чисел при помощи монеты»

Сгенерируйте случайное трехразрядное число, распределенное по равномерному закону в интервале от 0 до 1, с помощью монеты. Точность — три знака после запятой.

**Первый способ решения задачи**   
Подбросьте монету 9 раз, и если монета упала решкой, то запишите «0», если орлом, то «1». Итак, допустим, что в результате эксперимента получили случайную последовательность 100110100.

Начертите интервал от 0 до 1. Считывая числа в последовательности слева направо, разбивайте интервал пополам и выбирайте каждый раз одну из частей очередного интервала (если выпал 0, то левую, если выпала 1, то правую). Таким образом, можно добраться до любой точки интервала, сколь угодно точно.

Итак, **1**: интервал [0; 1] делится пополам — [0; 0.5] и [0.5; 1], — выбирается правая половина, интервал сужается: [0.5; 1]. Следующее число, **0**: интервал [0.5; 1] делится пополам — [0.5; 0.75] и [0.75; 1], — выбирается левая половина [0.5; 0.75], интервал сужается: [0.5; 0.75]. Следующее число, **0**: интервал [0.5; 0.75] делится пополам — [0.5; 0.625] и [0.625; 0.75], — выбирается левая половина [0.5; 0.625], интервал сужается: [0.5; 0.625]. Следующее число, **1**: интервал [0.5; 0.625] делится пополам — [0.5; 0.5625] и [0.5625; 0.625], — выбирается правая половина [0.5625; 0.6250], интервал сужается: [0.5625; 0.6250].

По условию точности задачи решение найдено: им является любое число из интервала [0.5625; 0.6250], например, 0.625.

В принципе, если подходить строго, то деление интервалов нужно продолжить до тех пор, пока левая и правая границы найденного интервала не СОВПАДУТ между собой с точностью до третьего знака после запятой. То есть с позиций точности сгенерированное число уже не будет отличимо от любого числа из интервала, в котором оно находится.

**Второй способ решения задачи**   
Разобьем полученную двоичную последовательность 100110100 на триады: 100, 110, 100. После перевода этих двоичных чисел в десятичные получаем: 4, 6, 4. Подставив спереди «0.», получим: 0.464. Таким методом могут получаться только числа от 0.000 до 0.777 (так как максимум, что можно «выжать» из трех двоичных разрядов — это 1112 = 78) — то есть, по сути, эти числа представлены в восьмеричной системе счисления. Для перевода восьмеричного числа в десятичное представление выполним:   
0.4648 = 4 · 8–1 + 6 · 8–2 + 4 · 8–3 = 0.601562510 = 0.60210.   
Итак, искомое число равно: 0.602.

## Табличные ГСЧ

Табличные ГСЧ в качестве источника случайных чисел используют специальным образом составленные таблицы, содержащие проверенные некоррелированные, то есть никак не зависящие друг от друга, цифры. В табл. 9.1 приведен небольшой фрагмент такой таблицы. Обходя таблицу слева направо сверху вниз, можно получать равномерно распределенные от 0 до 1 случайные числа с нужным числом знаков после запятой (в нашем примере мы используем для каждого числа по три знака). Так как цифры в таблице не зависят друг от друга, то таблицу можно обходить разными способами, например, сверху вниз, или справа налево, или, скажем, можно выбирать цифры, находящиеся на четных позициях.

|  |
| --- |
| Таблица 9.1. Случайные цифры. Равномерно распределенные от 0 до 1 случайные числа |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | **Случайные цифры** | | | | | | | | **Равномерно распределенные от 0 до 1 случайные числа** | | 9 | 2 | 9 | 2 | 0 | 4 | 2 | 6 | 0.929 | | 9 | 5 | 7 | 3 | 4 | 9 | 0 | 3 | 0.204 | | 5 | 9 | 1 | 6 | 6 | 5 | 7 | 6 | 0.269 | | **…** | | | | | | | | **…** | |

Достоинство данного метода в том, что он дает действительно случайные числа, так как таблица содержит проверенные некоррелированные цифры. Недостатки метода: для хранения большого количества цифр требуется много памяти; большие трудности порождения и проверки такого рода таблиц, повторы при использовании таблицы уже не гарантируют случайности числовой последовательности, а значит, и надежности результата.

[Ниже](file:///F:\Обучение\Математическое%20моделирование%20(лекции)\www.stratum.ac.ru\textbooks\modelir\lection22-01.html) находится таблица, содержащая 500 абсолютно случайных проверенных чисел (взято из книги И. Г. Венецкого, В. И. Венецкой «Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе»).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | 5489 5583 3156 0835 1988 3912 0938 7460 0869 4420 | | 3522 0935 7877 5665 7020 9555 7379 7124 7878 5544 | | 7555 7579 2550 2487 9477 0864 2349 1012 8250 2633 | | 5759 3554 5080 9074 7001 6249 3224 6368 9102 2672 | | 6303 6895 3371 3196 7231 2918 7380 0438 7547 2644 | | 7351 5634 5323 2623 7803 8374 2191 0464 0696 9529 | | 7068 7803 8832 5119 6350 0120 5026 3684 5657 0304 | | 3613 1428 1796 8447 0503 5654 3254 7336 9536 1944 | | 5143 4534 2105 0368 7890 2473 4240 8652 9435 1422 | | 9815 5144 7649 8638 6137 8070 5345 4865 2456 5708 | | 5780 1277 6316 1013 2867 9938 3930 3203 5696 1769 | | 1187 0951 5991 5245 5700 5564 7352 0891 6249 6568 | | 4184 2179 4554 9083 2254 2435 2965 5154 1209 7069 | | 2916 2972 9885 0275 0144 8034 8122 3213 7666 0230 | | 5524 1341 9860 6565 6981 9842 0171 2284 2707 3008 | | 0146 5291 2354 5694 0377 5336 6460 9585 3415 2358 | | 4920 2825 5238 5402 7937 1993 4332 2327 6875 5230 | | 7978 1947 6380 3425 7267 7285 1130 7722 0164 8573 | | 7453 0653 3645 7497 5969 8682 4191 2976 0361 9334 | | 1473 6938 4899 5348 1641 3652 0852 5296 4538 4456 | | 8162 8797 8000 4707 1880 9660 8446 1883 9768 0881 | | 5645 4219 0807 3301 4279 4168 4305 9937 3120 5547 | | 2042 1192 1175 8851 6432 4635 5757 6656 1660 5389 | | 5470 7702 6958 9080 5925 8519 0127 9233 2452 7341 | | 4045 1730 6005 1704 0345 3275 4738 4862 2556 8333 | | 5880 1257 6163 4439 7276 6353 6912 0731 9033 5294 | | 9083 4260 5277 4998 4298 5204 3965 4028 8936 5148 | | 1762 8713 1189 1090 8989 7273 3213 1935 9321 4820 | | 2023 2589 1740 0424 8924 0005 1969 1636 7237 1227 | | 7965 3855 4765 0703 1678 0841 7543 0308 9732 1289 | | 7690 0480 8098 9629 4819 7219 7241 5128 3853 1921 | | 9292 0426 9573 4903 5916 6576 8368 3270 6641 0033 | | 0867 1656 7016 4220 2533 6345 8227 1904 5138 2537 | | 0505 2127 8255 5276 2233 3956 4118 8199 6380 6340 | | 6295 9795 1112 5761 2575 6837 3336 9322 7403 8345 | | 6323 2615 3410 3365 1117 2417 3176 2434 5240 5455 | | 8672 8536 2966 5773 5412 8114 0930 4697 6919 4569 | | 1422 5507 7596 0670 3013 1351 3886 3268 9469 2584 | | 2653 1472 5113 5735 1469 9545 9331 5303 9914 6394 | | 0438 4376 3328 8649 8327 0110 4549 7955 5275 2890 | | 2851 2157 0047 7085 1129 0460 6821 8323 2572 8962 | | 7962 2753 3077 8718 7418 8004 1425 3706 8822 1494 | | 3837 4098 0220 1217 4732 0150 1637 1097 1040 7372 | | 8542 4126 9274 2251 0607 4301 8730 7690 6235 3477 | | 0139 0765 8039 9484 2577 7859 1976 0623 1418 6685 | | 6687 1943 4307 0579 8171 8224 8641 7034 3595 3875 | | 6242 5582 5872 3197 4919 2792 5991 4058 9769 1918 | | 6859 9606 0522 4993 0345 8958 1289 8825 6941 7685 | | 6590 1932 6043 3623 1973 4112 1795 8465 2110 8045 | | 3482 0478 0221 6738 7323 5643 4767 0106 2272 9862 | |

## Алгоритмические ГСЧ

Числа, генерируемые с помощью этих ГСЧ, всегда являются псевдослучайными (или квазислучайными), то есть каждое последующее сгенерированное число зависит от предыдущего:

*ri* + 1 = *f*(*ri*).

Последовательности, составленные из таких чисел, образуют петли, то есть обязательно существует цикл, повторяющийся бесконечное число раз. Повторяющиеся циклы называются периодами.

Достоинством данных ГСЧ является быстродействие; генераторы практически не требуют ресурсов памяти, компактны. Недостатки: числа нельзя в полной мере назвать случайными, поскольку между ними имеется зависимость, а также наличие периодов в последовательности квазислучайных чисел.

Рассмотрим несколько алгоритмических методов получения ГСЧ:

* метод серединных квадратов;
* метод серединных произведений;
* метод перемешивания;
* линейный конгруэнтный метод.

## Метод серединных квадратов

Имеется некоторое четырехзначное число *R*0. Это число возводится в квадрат и заносится в *R*1. Далее из *R*1 берется середина (четыре средних цифры) — новое случайное число — и записывается в *R*0. Затем процедура повторяется (см. рис. 22.6). Отметим, что на самом деле в качестве случайного числа необходимо брать не **ghij**, а **0.ghij** — с приписанным слева нулем и десятичной точкой. Этот факт отражен как на рис. 22.6, так и на последующих подобных рисунках.

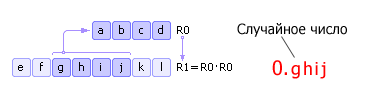


Рис. 9.6. Схема метода серединных квадратов

Недостатки метода: 1) если на некоторой итерации число *R*0 станет равным нулю, то генератор вырождается, поэтому важен правильный выбор начального значения *R*0; 2) генератор будет повторять последовательность через *Mn* шагов (в лучшем случае), где *n* — разрядность числа *R*0, *M* — основание системы счисления.

Для примера на рис. 9.6: если число *R*0 будет представлено в двоичной системе счисления, то последовательность псевдослучайных чисел повторится через 24 = 16 шагов. Заметим, что повторение последовательности может произойти и раньше, если начальное число будет выбрано неудачно.

Описанный выше способ был предложен Джоном фон Нейманом и относится к 1946 году. Поскольку этот способ оказался ненадежным, от него очень быстро отказались.

## Метод серединных произведений

Число *R*0 умножается на *R*1, из полученного результата *R*2 извлекается середина *R*2\* (это очередное случайное число) и умножается на *R*1. По этой схеме вычисляются все последующие случайные числа (см. рис. 9.7).

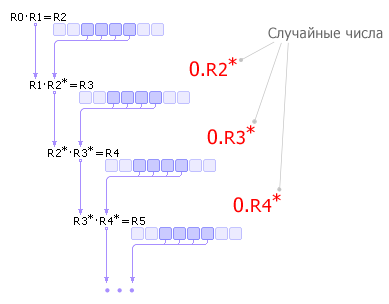


Рис. 9.7. Схема метода серединных произведений

## Метод перемешивания

В методе перемешивания используются операции циклического сдвига содержимого ячейки влево и вправо. Идея метода состоит в следующем. Пусть в ячейке хранится начальное число *R*0. Циклически сдвигая содержимое ячейки влево на 1/4 длины ячейки, получаем новое число *R*0\*. Точно так же, циклически сдвигая содержимое ячейки *R*0 вправо на 1/4 длины ячейки, получаем второе число *R*0\*\*. Сумма чисел *R*0\* и *R*0\*\* дает новое случайное число *R*1. Далее *R*1 заносится в *R*0, и вся последовательность операций повторяется (см. рис. 9.8).

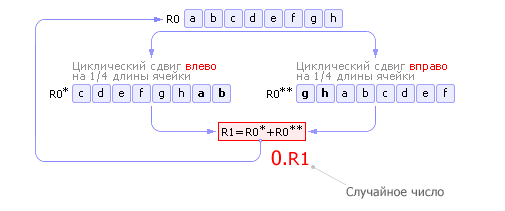


Рис. 9.8. Схема метода перемешивания

Обратите внимание, что число, полученное в результате суммирования *R*0\* и *R*0\*\*, может не уместиться полностью в ячейке *R*1. В этом случае от полученного числа должны быть отброшены лишние разряды. Поясним это для рис. 9.8, где все ячейки представлены восемью двоичными разрядами. Пусть *R*0\* = 100100012 = 14510, *R*0\*\* = 101000012 = 16110, тогда *R*0\* + *R*0\*\* = 1001100102 = 30610. Как видим, число 306 занимает 9 разрядов (в двоичной системе счисления), а ячейка *R*1 (как и *R*0) может вместить в себя максимум 8 разрядов. Поэтому перед занесением значения в *R*1 необходимо убрать один «лишний», крайний левый бит из числа 306, в результате чего в *R*1 пойдет уже не 306, а 001100102 = 5010. Также заметим, что в таких языках, как Паскаль, «урезание» лишних битов при переполнении ячейки производится автоматически в соответствии с заданным типом переменной.

## Линейный конгруэнтный метод

Линейный конгруэнтный метод является одной из простейших и наиболее употребительных в настоящее время процедур, имитирующих случайные числа. В этом методе используется операция mod(*x*, *y*), возвращающая остаток от деления первого аргумента на второй. Каждое последующее случайное число рассчитывается на основе предыдущего случайного числа по следующей формуле:

*ri* + 1 = mod(*k* · *ri* + *b*, *M*).

*M* — модуль (0 < *M*);

*k* — множитель (0 ≤ *k* < *M*);

*b* — приращение (0 ≤ *b* < *M*);

*r*0 — начальное значение (0 ≤ *r*0 < *M*).

Последовательность случайных чисел, полученных с помощью данной формулы, называется линейной конгруэнтной последовательностью. Многие авторы называют линейную конгруэнтную последовательность при *b* = 0 мультипликативным конгруэнтным методом, а при *b* ≠ 0 — смешанным конгруэнтным методом.

Для качественного генератора требуется подобрать подходящие коэффициенты. Необходимо, чтобы число *M* было довольно большим, так как период не может иметь больше *M* элементов. С другой стороны, деление, использующееся в этом методе, является довольно медленной операцией, поэтому для двоичной вычислительной машины логичным будет выбор *M* = 2*N*, поскольку в этом случае нахождение остатка от деления сводится внутри ЭВМ к двоичной логической операции «AND». Также широко распространен выбор наибольшего простого числа *M*, меньшего, чем 2*N*: в специальной литературе доказывается, что в этом случае младшие разряды получаемого случайного числа *ri* + 1 ведут себя так же случайно, как и старшие, что положительно сказывается на всей последовательности случайных чисел в целом. В качестве примера можно привести одно из чисел Мерсенна, равное 231 – 1, и таким образом, *M* = 231 – 1.

Одним из требований к линейным конгруэнтным последовательностям является как можно большая длина периода. Длина периода зависит от значений *M*, *k* и *b*. Теорема, которую мы приведем ниже, позволяет определить, возможно ли достижение периода максимальной длины для конкретных значений *M*, *k* и *b*.

**Теорема**. Линейная конгруэнтная последовательность, определенная числами *M*, *k*, *b* и *r*0, имеет период длиной *M* тогда и только тогда, когда:

* числа *b* и *M* взаимно простые;
* *k* – 1 кратно *p* для каждого простого *p*, являющегося делителем *M*;
* *k* – 1 кратно 4, если *M* кратно 4.

Наконец, в заключение рассмотрим пару примеров использования линейного конгруэнтного метода для генерации случайных чисел.

Пример 1

M = 2N  
k = 3 + 8 · q (или k = 5 + 8 · q)  
b = 0  
r0 — нечетно

Было установлено, что ряд псевдослучайных чисел, генерируемых на основе данных из примера 1, будет повторяться через каждые *M*/4 чисел. Число *q* задается произвольно перед началом вычислений, однако при этом следует иметь в виду, что ряд производит впечатление случайного при больших *k* (а значит, и *q*). Результат можно несколько улучшить, если *b* нечетно и *k* = 1 + 4 · *q* — в этом случае ряд будет повторяться через каждые *M* чисел. После долгих поисков *k* исследователи остановились на значениях 69069 и 71365.

Пример 2

M = 231 – 1  
k = 1 220 703 125  
b = 7  
r0 = 7

Генератор случайных чисел, использующий данные из примера 2, будет выдавать случайные неповторяющиеся числа с периодом, равным 7 миллионам.

Мультипликативный метод генерации псевдослучайных чисел был предложен Д. Г. Лехмером (D. H. Lehmer) в 1949 году.

## Проверка качества работы генератора

От качества работы ГСЧ зависит качество работы всей системы и точность результатов. Поэтому случайная последовательность, порождаемая ГСЧ, должна удовлетворять целому ряду критериев.

Осуществляемые проверки бывают двух типов:

* проверки на равномерность распределения;
* проверки на статистическую независимость.

## Проверки на равномерность распределения

**1) ГСЧ должен выдавать близкие к следующим значения статистических параметров, характерных для равномерного случайного закона:**

[ Формула 03 ]

— математическое ожидание;

[ Формула 04 ]

— дисперсия;

[ Формула 05 ]

— среднеквадратичное отклонение.

**2) Частотный тест**

Частотный тест позволяет выяснить, сколько чисел попало в интервал (*mr* – *σr*; *mr* + *σr*), то есть (0.5 – 0.2887; 0.5 + 0.2887) или, в конечном итоге, (0.2113; 0.7887). Так как 0.7887 – 0.2113 = 0.5774, заключаем, что в хорошем ГСЧ в этот интервал должно попадать около 57.7% из всех выпавших случайных чисел (см. рис. 9.9).

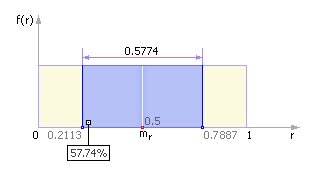


Рис. 9.9. Частотная диаграмма идеального ГСЧв случае проверки его на частотный тест

Также необходимо учитывать, что количество чисел, попавших в интервал (0; 0.5), должно быть примерно равно количеству чисел, попавших в интервал (0.5; 1).

**3) Проверка по критерию «хи-квадрат»**

Критерий «хи-квадрат» (χ2-критерий) — это один из самых известных статистических критериев; он является основным методом, используемым в сочетании с другими критериями. Критерий «хи-квадрат» был предложен в 1900 году Карлом Пирсоном. Его замечательная работа рассматривается как фундамент современной математической статистики.

Для нашего случая проверка по критерию «хи-квадрат» позволит узнать, насколько созданный нами реальный ГСЧ близок к [эталону ГСЧ](file:///F:\Обучение\Математическое%20моделирование%20(лекции)\www.stratum.ac.ru\textbooks\modelir\lection22.html#etalonRNG), то есть удовлетворяет ли он требованию равномерного распределения или нет.

Частотная диаграмма эталонного ГСЧ представлена на рис. 9.10. Так как закон распределения эталонного ГСЧ равномерный, то (теоретическая) вероятность *pi* попадания чисел в *i*-ый интервал (всего этих интервалов *k*) равна *pi* = 1/*k*. И, таким образом, в каждый из *k* интервалов попадет ровно по *pi* · *N* чисел (*N* — общее количество сгенерированных чисел).

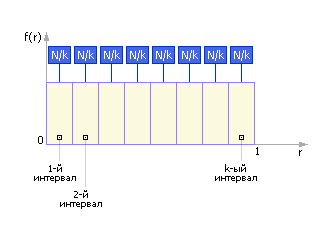


Рис. 9.10. Частотная диаграмма эталонного ГСЧ

Реальный ГСЧ будет выдавать числа, распределенные (причем, не обязательно равномерно!) по *k* интервалам и в каждый интервал попадет по *ni* чисел (в сумме *n*1 + *n*2 + … + *nk* = *N*). Как же нам определить, насколько испытываемый ГСЧ хорош и близок к эталонному? Вполне логично рассмотреть квадраты разностей между полученным количеством чисел *ni* и «эталонным» *pi* · *N*. Сложим их, и в результате получим:

χ2эксп. = (*n*1 – *p*1 · *N*)2 + (*n*2 – *p*2 · *N*)2 + … + (*nk* – *pk* · *N*)2.

Из этой формулы следует, что чем меньше разность в каждом из слагаемых (а значит, и чем меньше значение χ2эксп.), тем сильнее закон распределения случайных чисел, генерируемых реальным ГСЧ, тяготеет к равномерному.

В предыдущем выражении каждому из слагаемых приписывается одинаковый вес (равный 1), что на самом деле может не соответствовать действительности; поэтому для статистики «хи-квадрат» необходимо провести нормировку каждого *i*-го слагаемого, поделив его на *pi* · *N*:

[ Формула 06 ]

Наконец, запишем полученное выражение более компактно и упростим его:

[ Формула 07 ]

Мы получили значение критерия «хи-квадрат» для экспериментальных данных.

В табл. 9.2 приведены теоретические значения «хи-квадрат» (χ2теор.), где *ν* = *N* – 1 — это число степеней свободы, **p** — это доверительная вероятность, задаваемая пользователем, который указывает, насколько ГСЧ должен удовлетворять требованиям равномерного распределения, или **p** — это вероятность того, что экспериментальное значение *χ2эксп.* будет меньше табулированного (теоретического) *χ2теор.* или равно ему.

|  |
| --- |
| Таблица 9.2. Некоторые процентные точки χ2-распределения |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | **p = 1%** | **p = 5%** | **p = 25%** | **p = 50%** | **p = 75%** | **p = 95%** | **p = 99%** | | ***ν* = 1** | 0.00016 | 0.00393 | 0.1015 | 0.4549 | 1.323 | 3.841 | 6.635 | | ***ν* = 2** | 0.02010 | 0.1026 | 0.5754 | 1.386 | 2.773 | 5.991 | 9.210 | | ***ν* = 3** | 0.1148 | 0.3518 | 1.213 | 2.366 | 4.108 | 7.815 | 11.34 | | ***ν* = 4** | 0.2971 | 0.7107 | 1.923 | 3.357 | 5.385 | 9.488 | 13.28 | | ***ν* = 5** | 0.5543 | 1.1455 | 2.675 | 4.351 | 6.626 | 11.07 | 15.09 | | ***ν* = 6** | 0.8721 | 1.635 | 3.455 | 5.348 | 7.841 | 12.59 | 16.81 | | ***ν* = 7** | 1.239 | 2.167 | 4.255 | 6.346 | 9.037 | 14.07 | 18.48 | | ***ν* = 8** | 1.646 | 2.733 | 5.071 | 7.344 | 10.22 | 15.51 | 20.09 | | ***ν* = 9** | 2.088 | 3.325 | 5.899 | 8.343 | 11.39 | 16.92 | 21.67 | | ***ν* = 10** | 2.558 | 3.940 | 6.737 | 9.342 | 12.55 | 18.31 | 23.21 | | ***ν* = 11** | 3.053 | 4.575 | 7.584 | 10.34 | 13.70 | 19.68 | 24.72 | | ***ν* = 12** | 3.571 | 5.226 | 8.438 | 11.34 | 14.85 | 21.03 | 26.22 | | ***ν* = 15** | 5.229 | 7.261 | 11.04 | 14.34 | 18.25 | 25.00 | 30.58 | | ***ν* = 20** | 8.260 | 10.85 | 15.45 | 19.34 | 23.83 | 31.41 | 37.57 | | ***ν* = 30** | 14.95 | 18.49 | 24.48 | 29.34 | 34.80 | 43.77 | 50.89 | | ***ν* = 50** | 29.71 | 34.76 | 42.94 | 49.33 | 56.33 | 67.50 | 76.15 | | ***ν* > 30** | *ν* + sqrt(2*ν*) · *xp* + 2/3 · *x*2*p* – 2/3 + *O*(1/sqrt(*ν*)) | | | | | | | | ***xp* =** | –2.33 | –1.64 | –0.674 | 0.00 | 0.674 | 1.64 | 2.33 | |

Приемлемым считают **p** от 10% до 90%.

Если χ2эксп. много больше χ2теор. (то есть **p** — велико), то генератор **не удовлетворяет** требованию равномерного распределения, так как наблюдаемые значения *ni* слишком далеко уходят от теоретических *pi* · *N* и не могут рассматриваться как случайные. Другими словами, устанавливается такой большой доверительный интервал, что ограничения на числа становятся очень нежесткими, требования к числам — слабыми. При этом будет наблюдаться очень большая абсолютная погрешность.

Еще Д. Кнут в своей книге «Искусство программирования» заметил, что иметь χ2эксп. маленьким тоже, в общем-то, нехорошо, хотя это и кажется, на первый взгляд, замечательно с точки зрения равномерности. Действительно, возьмите ряд чисел 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, … — они идеальны с точки зрения равномерности, и χ2эксп. будет практически нулевым, но вряд ли вы их признаете случайными.

Если χ2эксп. много меньше χ2теор. (то есть **p** — мало), то генератор **не удовлетворяет** требованию случайного равномерного распределения, так как наблюдаемые значения *ni* слишком близки к теоретическим *pi* · *N* и не могут рассматриваться как случайные.

А вот если χ2эксп. лежит в некотором диапазоне, между двумя значениями χ2теор., которые соответствуют, например, **p** = 25% и **p** = 50%, то можно считать, что значения случайных чисел, порождаемые датчиком, вполне являются случайными.

При этом дополнительно надо иметь в виду, что все значения *pi* · *N* должны быть достаточно большими, например больше 5 (выяснено эмпирическим путем). Только тогда (при достаточно большой статистической выборке) условия проведения эксперимента можно считать удовлетворительными.

Итак, процедура проверки имеет следующий вид.

1. Диапазон от 0 до 1 разбивается на *k* равных интервалов.
2. Запускается ГСЧ *N* раз (*N* должно быть велико, например, *N*/*k* > 5).
3. Определяется количество случайных чисел, попавших в каждый интервал: *ni*, *i* = 1, …, *k*.
4. Вычисляется экспериментальное значение χ2эксп. по следующей формуле:

[ Формула 08 ]

где *pi* = 1/*k* — теоретическая вероятность попадания чисел в *k*-ый интервал.

1. Путем сравнения экспериментально полученного значения χ2эксп. с теоретическим χ2теор. (из табл. 22.2) делается вывод о пригодности генератора для использования. Для этого: а) входим в табл. 22.2 (**строка = количество экспериментов – 1**); б) сравниваем вычисленное χ2эксп. с χ2теор., встречающимися в строке. При этом возможно три случая.

Первый случай: χ2эксп. много больше любого χ2теор. в строке — гипотеза о случайности равномерного генератора не выполняется (разброс чисел слишком велик, чтобы быть случайным).

Второй случай: χ2эксп. много меньше любого χ2теор. в строке — гипотеза о случайности равномерного генератора не выполняется (разброс чисел слишком мал, чтобы быть случайным).

Третий случай: χ2эксп. лежит между значениями χ2теор. двух рядом стоящих столбцов — гипотеза о случайности равномерного генератора выполняется с вероятностью **p** (то есть в **p** случаях из 100).

Заметим, что чем ближе получается **p** к значению 50%, тем лучше.

## Проверки на статистическую независимость

**1) Проверка на частоту появления цифры в последовательности**

Рассмотрим пример. Случайное число 0.2463389991 состоит из цифр 2463389991, а число 0.5467766618 состоит из цифр 5467766618. Соединяя последовательности цифр, имеем: 24633899915467766618.

Понятно, что теоретическая вероятность *pi* выпадения *i*-ой цифры (от 0 до 9) равна 0.1.

Далее следует вычислить частоту появления каждой цифры в выпавшей экспериментальной последовательности. Например, цифра 1 выпала 2 раза из 20, а цифра 6 выпала 5 раз из 20.

Далее считают оценку и принимают решение по критерию «хи-квадрат».

**2) Проверка появления серий из одинаковых цифр**

Обозначим через *nL* число серий одинаковых подряд цифр длины *L*. Проверять надо все *L* от 1 до *m*, где *m* — это заданное пользователем число: максимально встречающееся число одинаковых цифр в серии.

В примере «24633899915467766618» обнаружены 2 серии длиной в 2 (33 и 77), то есть *n*2 = 2 и 2 серии длиной в 3 (999 и 666), то есть *n*3 = 2.

Вероятность появления серии длиной в *L* равна: *pL* = 9 · 10–*L* (теоретическая). То есть вероятность появления серии длиной в один символ равна: *p*1 = 0.9 (теоретическая). Вероятность появления серии длиной в два символа равна: *p*2 = 0.09 (теоретическая). Вероятность появления серии длиной в три символа равна: *p*3 = 0.009 (теоретическая).

Например, вероятность появления серии длиной в один символ равна *pL* = 0.9, так как всего может встретиться один символ из 10, а всего символов 9 (ноль не считается). А вероятность того, что подряд встретится два одинаковых символа «XX» равна 0.1 · 0.1 · 9, то есть вероятность 0.1 того, что в первой позиции появится символ «X», умножается на вероятность 0.1 того, что во второй позиции появится такой же символ «X» и умножается на количество таких комбинаций 9.

Частость появления серий подсчитывается по ранее разобранной нами формуле «хи-квадрат» с использованием значений *pL*.

Примечание: генератор может быть проверен многократно, однако проверки не обладают свойством полноты и не гарантируют, что генератор выдает случайные числа. Например, генератор, выдающий последовательность 12345678912345…, при проверках будет считаться идеальным, что, очевидно, не совсем так.

В заключение отметим, что третья глава книги Дональда Э. Кнута «Искусство программирования» (том 2) полностью посвящена изучению случайных чисел. В ней изучаются различные методы генерирования случайных чисел, статистические критерии случайности, а также преобразование равномерно распределенных случайных чисел в другие типы случайных величин. Изложению этого материала уделено более двухсот страниц.

# Лекция 10 Моделирование систем массового обслуживания

Большой класс систем, которые сложно изучить аналитическими способами, но которые хорошо изучаются методами статистического моделирования, сводится к системам массового обслуживания (СМО).

В СМО подразумевается, что есть типовые пути (каналы обслуживания), через которые в процессе обработки проходят заявки. Принято говорить, что заявки обслуживаются каналами. Каналы могут быть разными по назначению, характеристикам, они могут сочетаться в разных комбинациях; заявки могут находиться в очередях и ожидать обслуживания. Часть заявок может быть обслужена каналами, а части могут отказать в этом. Важно, что заявки, с точки зрения системы, абстрактны: это то, что желает обслужиться, то есть пройти определенный путь в системе. Каналы являются также абстракцией: это то, что обслуживает заявки.

Заявки могут приходить неравномерно, каналы могут обслуживать разные заявки за разное время и так далее, количество заявок всегда весьма велико. Все это делает такие системы сложными для изучения и управления, и проследить все причинно-следственные связи в них не представляется возможным. Поэтому принято представление о том, что обслуживание в сложных системах носит случайный характер.

Примерами СМО (см. табл. 10.1) могут служить: автобусный маршрут и перевозка пассажиров; производственный конвейер по обработке деталей; влетающая на чужую территорию эскадрилья самолетов, которая «обслуживается» зенитками ПВО; ствол и рожок автомата, которые «обслуживают» патроны; электрические заряды, перемещающиеся в некотором устройстве и т. д.

|  |
| --- |
| Таблица 10.1. Примеры систем массового обслуживания |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | **СМО** | **Заявки** | **Каналы** | | Автобусный маршрут и перевозка пассажиров | Пассажиры | Автобусы | | Производственный конвейер по обработке деталей | Детали, узлы | Станки, склады | | Влетающая на чужую территорию эскадрилья самолетов, которая «обслуживается» зенитками ПВО | Самолеты | Зенитные орудия, радары, стрелки, снаряды | | Ствол и рожок автомата, которые «обслуживают» патроны | Патроны | Ствол, рожок | | Электрические заряды, перемещающиеся в некотором устройстве | Заряды | Каскады технического устройства | |

Но все эти системы объединены в один класс СМО, поскольку подход к их изучению един. Он состоит в том, что, во-первых, с помощью генератора случайных чисел разыгрываются случайные числа, которые имитируют СЛУЧАЙНЫЕ моменты появления заявок и время их обслуживания в каналах. Но в совокупности эти случайные числа, конечно, подчинены статистическим закономерностям.

К примеру, пусть сказано: «заявки в среднем приходят в количестве 5 штук в час». Это означает, что времена между приходом двух соседних заявок случайны, например: 0.1; 0.3; 0.1; 0.4; 0.2, как это показано нарис. 10.1**,** но в сумме они дают в среднем 1 (обратите внимание, что в примере это не точно 1, а 1.1 — но зато в другой час эта сумма, например, может быть равной 0.9); и только за достаточно большое время среднее этих чисел станет близким к одному часу.

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.1. Случайный процесс прихода заявок в СМО ] | |
| Рис. 10.1. Случайный процесс прихода заявок в СМО |

Результат (например, пропускная способность системы), конечно, тоже будет случайной величиной на отдельных промежутках времени. Но измеренная на большом промежутке времени, эта величина будет уже, в среднем, соответствовать точному решению. То есть для характеристики СМО интересуются ответами в статистическом смысле.

Итак, систему испытывают случайными входными сигналами, подчиненными заданному статистическому закону, а в качестве результата принимают статистические показатели, усредненные по времени рассмотрения или по количеству опытов. Схема для такого статистического эксперимента приведена ниже (см. рис. 10.2).

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.2. Схема статистического эксперимента для изучения систем массового обслуживания ] | |
| Рис. 10.2. Схема статистического эксперимента для изучения систем массового обслуживания |

Во-вторых, все модели СМО собираются типовым образом из небольшого набора элементов (канал, источник заявок, очередь, заявка, дисциплина обслуживания, стек, кольцо и так далее), что позволяет имитировать эти задачи типовым образом. Для этого модель системы собирают из конструктора таких элементов. Неважно, какая конкретно система изучается, важно, что схема системы собирается из одних и тех же элементов. Разумеется, структура схемы будет всегда различной.

Перечислим некоторые основные понятия СМО.

Каналы — то, что обслуживает; бывают горячие (начинают обслуживать заявку в момент ее поступления в канал) и холодные (каналу для начала обслуживания требуется время на подготовку). Источники заявок — порождают заявки в случайные моменты времени, согласно заданному пользователем статистическому закону. Заявки, они же клиенты, входят в систему (порождаются источниками заявок), проходят через ее элементы (обслуживаются), покидают ее обслуженными или неудовлетворенными. Бывают нетерпеливые заявки — такие, которым надоело ожидать или находиться в системе и которые покидают по собственной воле СМО. Заявки образуют потоки — поток заявок на входе системы, поток обслуженных заявок, поток отказанных заявок. Поток характеризуется количеством заявок определенного сорта, наблюдаемым в некотором месте СМО за единицу времени (час, сутки, месяц), то есть поток есть величина статистическая.

Очереди характеризуются правилами стояния в очереди (дисциплиной обслуживания), количеством мест в очереди (сколько клиентов максимум может находиться в очереди), структурой очереди (связь между местами в очереди). Бывают ограниченные и неограниченные очереди. Перечислим важнейшие дисциплины обслуживания.

FIFO (First In, First Out — первым пришел, первым ушел): если заявка первой пришла в очередь, то она первой уйдет на обслуживание.

LIFO (Last In, First Out — последним пришел, первым ушел): если заявка последней пришла в очередь, то она первой уйдет на обслуживание (пример — патроны в рожке автомата).

SF (Short Forward — короткие вперед): в первую очередь обслуживаются те заявки из очереди, которые имеют меньшее время обслуживания.

Дадим яркий пример, показывающий, как правильный выбор той или иной дисциплины обслуживания позволяет получить ощутимую экономию по времени.

Пусть имеется два магазина. В магазине № 1 обслуживание осуществляется в порядке очереди, то есть здесь реализована дисциплина обслуживания FIFO (см. рис. 10.3).

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.3. Организация очереди по дисциплине FIFO ] | |
| Рис. 10.3. Организация очереди по дисциплине FIFO |

Время обслуживания *t*обслуж. на рис. 10.3 показывает, сколько времени продавец затратит на обслуживание одного покупателя. Понятно, что при покупке штучного товара продавец затратит меньше времени на обслуживание, чем при покупке, скажем, сыпучих продуктов, требующих дополнительных манипуляций (набрать, взвесить, высчитать цену и т. п). Время ожидания *t*ожид. показывает, через какое время очередной покупатель будет обслужен продавцом.

В магазине № 2 реализована дисциплина SF (см. рис. 10.4), означающая, что штучный товар можно купить вне очереди, так как время обслуживания *t*обслуж. такой покупки невелико.

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.4. Организация очереди по дисциплине SF ] | |
| Рис. 10.4. Организация очереди по дисциплине SF |

Как видно из обоих рисунков, последний (пятый) покупатель собирается приобрести штучный товар, поэтому время его обслуживания невелико — 0.5 минут. Если этот покупатель придет в магазин № 1, он будет вынужден выстоять в очереди целых 8 минут, в то время как в магазине № 2 его обслужат сразу же, вне очереди. Таким образом, среднее время обслуживания каждого из покупателей в магазине с дисциплиной обслуживания FIFO составит 4 минуты, а в магазине с дисциплиной обслуживания КВ — лишь 2.8 минуты. А общественная польза, экономия времени составит: (1 – 2.8/4) · 100% = 30 процентов! Итак, 30% сэкономленного для общества времени — и это лишь за счет правильного выбора дисциплины обслуживания.

**Специалист по системам должен хорошо понимать ресурсы производительности и эффективности проектируемых им систем, скрытые в оптимизации параметров, структур и дисциплинах обслуживания. Моделирование помогает выявить эти скрытые резервы**.

При анализе результатов моделирования важно также указать интересы и степень их выполнения. Различают интересы клиента и интересы владельца системы. Заметим, что эти интересы совпадают не всегда.

Судить о результатах работы СМО можно по показателям. Наиболее популярные из них:

* вероятность обслуживания клиента системой;
* пропускная способность системы;
* вероятность отказа клиенту в обслуживании;
* вероятность занятости каждого из канала и всех вместе;
* среднее время занятости каждого канала;
* вероятность занятости всех каналов;
* среднее количество занятых каналов;
* вероятность простоя каждого канала;
* вероятность простоя всей системы;
* среднее количество заявок, стоящих в очереди;
* среднее время ожидания заявки в очереди;
* среднее время обслуживания заявки;
* среднее время нахождения заявки в системе.

Судить о качестве полученной системы нужно по совокупности значений показателей. При анализе результатов моделирования (показателей) важно также обращать внимание на интересы клиента и интересы владельца системы, то есть минимизировать или максимизировать надо тот или иной показатель, а также на степень их выполнения. Заметим, что чаще всего интересы клиента и владельца между собой не совпадают или совпадают не всегда. Показатели будем обозначать далее *H* = {*h*1, *h*2, …}.

Параметрами СМО могут быть: интенсивность потока заявок, интенсивность потока обслуживания, среднее время, в течение которого заявка готова ожидать обслуживания в очереди, количество каналов обслуживания, дисциплина обслуживания и так далее. Параметры — это то, что влияет на показатели системы. Параметры будем обозначать далее как *R* = {*r*1, *r*2, …}.

Пример. Автозаправочная станция (АЗС).

**1. Постановка задачи**. На рис. 10.5 приведен план АЗС. Рассмотрим метод моделирования СМО на ее примере и план ее исследования. Водители, проезжая по дороге мимо АЗС по дороге, могут захотеть заправить свой автомобиль. Хотят обслужиться (заправить машину бензином) не все автомобилисты подряд; допустим, что из всего потока машин на заправку в среднем заезжает 5 машин в час.

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.5. План моделируемой АЗС ] | |
| Рис. 10.5. План моделируемой АЗС |

На АЗС две одинаковые колонки, статистическая производительность каждой из которых известна. Первая колонка в среднем обслуживает 1 машину в час, вторая в среднем — 3 машины в час. Владелец АЗС заасфальтировал для машин место, где они могут ожидать обслуживания. Если колонки заняты, то на этом месте могут ожидать обслуживания другие машины, но не более двух одновременно. Очередь будем считать общей. Как только одна из колонок освободится, то первая машина из очереди может занять ее место на колонке (при этом вторая машина продвигается на первое место в очереди). Если появляется третья машина, а все места (их два) в очереди заняты, то ей отказывают в обслуживании, так как стоять на дороге запрещено (см. дорожные знаки около АЗС). Такая машина уезжает прочь из системы навсегда и как потенциальный клиент является потерянной для владельца АЗС. Можно усложнить задачу, рассмотрев кассу (еще один канал обслуживания, куда надо попасть после обслуживания в одной из колонок) и очередь к ней и так далее. Но в простейшем варианте очевидно, что пути движения потоков заявок по СМО можно изобразить в виде эквивалентной схемы, а добавив значения и обозначения характеристик каждого элемента СМО, получаем окончательно схему, изображенную на рис. 10.6**.**

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.6. Эквивалентная схема объекта моделирования ] | |
| Рис. 10.6. Эквивалентная схема объекта моделирования |

**2. Метод исследования СМО**. Применим в нашем примере принцип последовательной проводки заявок. Его идея заключается в том, что заявку проводят через всю систему от входа до выхода, и только после этого берутся за моделирование следующей заявки.

Для наглядности построим временную диаграмму работы СМО, отражая на каждой линейке (ось времени *t*) состояние отдельного элемента системы. Временных линеек проводится столько, сколько имеется различных мест в СМО, потоков. В нашем примере их 7 (поток заявок, поток ожидания на первом месте в очереди, поток ожидания на втором месте в очереди, поток обслуживания в канале 1, поток обслуживания в канале 2, поток обслуженных системой заявок, поток отказанных заявок).

Для генерации времени прихода заявок используем формулу вычисления интервала между моментами прихода двух случайных событий

[ Формула 01 ]

В этой формуле величина потока *λ* должна быть задана (до этого она должна быть определена экспериментально на объекте как статистическое среднее), *r* — случайное равномерно распределенное число от 0 до 1 из ГСЧ или таблицы в которой случайные числа нужно брать подряд (не выбирая специально).

Задача. Сгенерируйте поток из 10 случайных событий с интенсивностью появления событий 5 шт/час.

Решение задачи. Возьмем случайные числа, равномерно распределенные в интервале от 0 до 1, и вычислим их натуральные логарифмы (см. табл. 10.2).

|  |
| --- |
| Таблица 10.2. Фрагмент таблицы случайных чисел и их логарифмов |
| |  |  | | --- | --- | | **rрр[0; 1]** | **ln(rрр[0; 1])** | | 0.0333 | –3.4022 | | 0.3557 | –1.0337 | | 0.2172 | –1.5269 | | 0.5370 | –0.6218 | |

Формула пуассоновского потока определяет расстояние между двумя случайными событиями следующим образом: *t* = –Ln(rрр)/*λ*. Тогда, учитывая, что *λ* = 5, имеем расстояния между двумя случайными соседними событиями: 0.68, 0.21, 0.31, 0.12 часа. То есть события наступают: первое — в момент времени *t* = 0, второе — в момент времени *t* = 0.68, третье — в момент времени *t* = 0.89, четвертое — в момент времени *t* = 1.20, пятое — в момент времени *t* = 1.32 и так далее. События — приход заявок отразим на первой линейке (см. рис. 10.7).

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.7. Временная диаграмма работы СМО ] | |
| Рис. 10.7. Временная диаграмма работы СМО |

Берется первая заявка и, так как в этот момент каналы свободны, устанавливается на обслуживание в первый канал. Заявка 1 переносится на линейку «1 канал».

Время обслуживания в канале тоже случайное и вычисляется по аналогичной формуле:

[ Формула 02 ]

где роль интенсивности играет величина потока обслуживания *μ*1 или *μ*2, в зависимости от того, какой канал обслуживает заявку. Находим на диаграмме момент окончания обслуживания, откладывая сгенерированное время обслуживания от момента начала обслуживания, и опускаем заявку на линейку «Обслуженные».

Заявка прошла в СМО весь путь. Теперь можно, согласно принципу последовательной проводки заявок, также проимитировать путь второй заявки.

Если в некоторый момент окажется, что оба канала заняты, то следует установить заявку в очередь. На рис. 10.7 это заявка с номером 3. Заметим, что по условиям задачи в очереди в отличие от каналов заявки находятся не случайное время, а ожидают, когда освободится какой-то из каналов. После освобождения канала заявка поднимается на линейку соответствующего канала и там организуется ее обслуживание.

Если все места в очереди в момент, когда придет очередная заявка, будут заняты, то заявку следует отправить на линейку «Отказанные». На рис. 10.7 это заявка с номером 6.

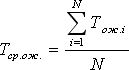
Процедуру имитации обслуживания заявок продолжают некоторое время наблюдения *T*н. Чем больше это время, тем точнее в дальнейшем будут результаты моделирования. Реально для простых систем выбирают *T*н, равное 50—100 и более часов, хотя иногда лучше мерить эту величину количеством рассмотренных заявок.

## Анализ временной диаграммы

Анализ проведем на уже рассмотренном примере.

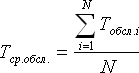
Сначала нужно дождаться установившегося режима. Откидываем первые четыре заявки как нехарактерные, протекающие во время процесса установления работы системы. Измеряем время наблюдения, допустим, что в нашем примере оно составит *T*н = 5 часов. Подсчитываем из диаграммы количество обслуженных заявок *N*обс., времена простоя и другие величины. В результате можем вычислить показатели, характеризующие качество работы СМО.

1. Вероятность обслуживания: *P*обс. = *N*обс./*N* = 5/7 = 0.714. Для расчета вероятности обслуживания заявки в системе достаточно разделить число заявок, которым удалось обслужиться за время *T*н (см. линейку «Обслуженные») *N*обс., на число заявок *N*, которые хотели обслужиться за это же время. Как и раньше вероятность экспериментально определяем отношением свершившихся событий к общему числу событий, которые могли совершиться!
2. Пропускная способность системы: *A* = *N*обс./*T*н = 7/5 = 1.4 [шт/час]. Для расчета пропускной способности системы достаточно разделить число обслуженных заявок *N*обс. на время *T*н, за которое произошло это обслуживание (см. линейку «Обслуженные»).
3. Вероятность отказа: *P*отк. = *N*отк./*N* = 3/7 = 0.43. Для расчета вероятности отказа заявке в обслуживании достаточно разделить число заявок *N*отк., которым отказали за время *T*н (см. линейку «Отказанные»), на число заявок *N*, которые хотели обслужиться за это же время, то есть поступили в систему. **Обратите внимание**. *P*отк. + *P*обс. в теории должно быть равно 1. На самом деле экспериментально получилось, что *P*отк. + *P*обс. = 0.714 + 0.43 = 1.144. Эта неточность объясняется тем, что время наблюдения *T*н мало и статистика накоплена недостаточная для получения точного ответа. Погрешность это показателя сейчас составляет 14%!
4. Вероятность занятости одного канала: *P*1 = *T*зан./*T*н = 0.05/5 = 0.01, где *T*зан. — время занятости только одного канала (первого или второго). Измерениям подлежат временные отрезки, на которых происходят определенные события. Например, на диаграмме ищутся такие отрезки, во время которых заняты или первый или второй канал. В данном примере есть один такой отрезок в конце диаграммы длиной 0.05 часа. Доля этого отрезка в общем времени рассмотрения (*T*н = 5 часов) определяется делением и составляет искомую вероятность занятости.
5. Вероятность занятости двух каналов: *P*2 = *T*зан./*T*н = 4.95/5 = 0.99. На диаграмме ищутся такие отрезки, во время которых одновременно заняты и первый, и второй канал. В данном примере таких отрезков четыре, их сумма равна 4.95 часа. Доля продолжительности этих события в общем времени рассмотрения (*T*н = 5 часов) определяется делением и составляет искомую вероятность занятости.
6. Среднее количество занятых каналов: *N*ск = 0 · *P*0 + 1 · *P*1 + 2 · *P*2 = 0.01 + 2 · 0.99 = 1.99. Чтобы подсчитать, сколько каналов занято в системе в среднем, достаточно знать долю (вероятность занятости одного канала) и умножить на вес этой доли (один канал), знать долю (вероятность занятости двух каналов) и умножить на вес этой доли (два канала) и так далее. Полученная цифра 1.99 говорит о том, что из возможных двух каналов в среднем загружено 1.99 канала. Это высокий показатель загрузки, 99.5%, система хорошо использует ресурс.
7. Вероятность простоя хотя бы одного канала: *P*\*1 = *T*простоя1/*T*н = 0.05/5 = 0.01.
8. Вероятность простоя двух каналов одновременно: *P*\*2 = *T*простоя2/*T*н = 0.
9. Вероятность простоя всей системы: *P*\*c = *T*простоя сист./*T*н = 0.
10. Среднее количество заявок в очереди: *N*сз = 0 · *P*0з + 1 · *P*1з + 2 · *P*2з = 0.34 + 2 · 0.64 = 1.62 [шт]. Чтобы определить среднее количество заявок в очереди, надо определить отдельно вероятность того, что в очереди будет одна заявка *P*1з, вероятность того, в очереди будет стоять две заявки *P*2з и т. д. и снова с соответствующими весами их сложить.
11. Вероятность того, что в очереди будет одна заявка: *P*1з = *T*1з/*T*н = 1.7/5 = 0.34 (всего на диаграмме четырех таких отрезка, в сумме дающих 1.7 часа).
12. Вероятность того, в очереди будет стоять одновременно две заявки: *P*2з = *T*2з/*T*н = 3.2/5 = 0.64 (всего на диаграмме три таких отрезка, в сумме дающих 3.25 часа).
13. Среднее время ожидания заявки в очереди:



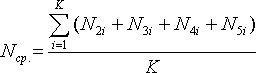
(Сложить все временные интервалы, в течение которых какая-либо заявка находилась в очереди, и разделить на количество заявок). На временной диаграмме таких заявок 4.

1. Среднее время обслуживания заявки:



(Сложить все временные интервалы, в течение которых какая-либо заявка находилась на обслуживании в каком-либо канале, и разделить на количество заявок).

1. Среднее время нахождения заявки в системе: *T*ср. сист. = *T*ср. ож. + *T*ср. обсл..
2. Среднее количество заявок в системе:



Разобьем интервал наблюдения, например, на десятиминутки. Получится на пяти часах *K* подынтервалов (в нашем случае *K* = 30). В каждом подынтервале определим по временной диаграмме, сколько заявок в этот момент находится в системе. Смотреть надо на 2, 3, 4 и 5-ю линейки — какие из них заняты в данный момент. Затем сумму *K* слагаемых усреднить.

Далее следует оценить точность каждого из полученных результатов. То есть ответить на вопрос: насколько мы можем доверять этим значениям?

Если точность не является удовлетворительной, то следует увеличить время эксперимента и тем самым улучшить статистику. Можно сделать и по-другому. Снова несколько раз запустить эксперимент на время *T*н. А в последствии усреднить значения этих экспериментов. И снова проверить результаты на критерий точности. Эту процедуру следует повторять до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

Далее следует составить таблицу результатов и оценить значения каждого из них с точки зрения клиента и владельца СМО (см. табл. 30.3).. В конце, учитывая сказанное в каждом пункте, следует сделать общий вывод. Таблица должна иметь примерно такой вид, какой показан в табл. 10.3.

|  |
| --- |
| Таблица 10.3. Показатели СМО |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | **Показатель** | **Формула** | **Значение** | **Интересы владельца СМО** | **Интересы клиента СМО** | | Вероятность обслуживания | *P*обс. = *N*обс./*N* | 0.714 | Вероятность обслуживания мала, много клиентов уходят из системы неудовлетворенными, их деньги для владельца потеряны. Это «минус».   Рекомендация: увеличить вероятность обслуживания. | Вероятность обслуживания мала, каждый третий клиент хочет, но не может обслужиться. Это «минус».   Рекомендация: увеличить вероятность обслуживания. | | … | … | … | … | … | | Среднее количество заявок в очереди | *N*сз = 0 · *P*0з + 1 · *P*1з + 2 · *P*2з | 1.62 | Очередь практически все время вся забита. Все места в очереди используются достаточно эффективно. Вложения на организацию очереди окупают затраты на нее. Это «плюс».  Клиенты, которые долго стоят в очереди, могут уйти, не дождавшись обслуживания. Клиенты, простаивая, могут нанести ущерб системе, ломать оборудование. Много отказов, потерянных клиентов. Это «минусы».   Рекомендация: увеличить число мест в очереди, увеличить пропускную способность. | Очередь практически все время вся забита. Клиенту приходится стоять в очереди, прежде чем он попадет на обслуживание. Клиент может не попасть даже в очередь. Это «минус».   Рекомендация: увеличить пропускную способность, увеличить число мест в очереди. | | Общий итог: | | | В интересах владельца: а) увеличить пропускную способность каналов, чтобы не терять клиентов (правда, модернизация каналов стоит денег); б) увеличить число мест в очереди (это тоже стоит денег), чтобы задержать потенциальных клиентов. | Клиенты заинтересованы в значительном увеличении пропускной способности для уменьшения времени ожидания и уменьшения отказов. | |

## Синтез СМО

Мы проделали анализ существующей системы. Это дало возможность увидеть ее недостатки и определить направления улучшения ее качества. Но остаются непонятными ответы на конкретные вопросы, что именно надо сделать — увеличивать количество каналов или увеличивать их пропускную способность, или увеличивать количество мест в очереди, и, если увеличивать, то насколько? Есть и такие вопросы, что лучше — создать 3 канала с производительностью 5 шт/час или один с производительностью 15 шт/час?

Чтобы оценить чувствительность каждого показателя к изменению значения определенного параметра, поступают следующим образом. Фиксируют все параметры кроме одного, выбранного. Затем снимают значение всех показателей при нескольких значениях этого выбранного параметра. Конечно, приходится повторять снова и снова процедуру имитации и усреднять показатели при каждом значении параметра, оценивать точность. Но в результате получаются надежные статистические зависимости характеристик (показателей) от параметра.

Например, для 12 показателей нашего примера можно получить 12 зависимостей от одного параметра: зависимость вероятности отказов *P*отк. от количества мест в очереди (КМО), зависимость пропускной способности *A* от количества мест в очереди, и так далее (см. рис. 10.8).

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.8. Примерный вид зависимостей показателей от параметров СМО ] | |
| Рис. 10.8. Примерный вид зависимостей показателей от параметров СМО |

Затем так же можно снять еще 12 зависимостей показателей *P* от другого параметра *R*, зафиксировав остальные параметры. И так далее. Образуется своеобразная матрица зависимостей показателей *P* от параметров *R*, по которой можно провести дополнительный анализ о перспективах движения (улучшения показателей) в ту или иную сторону. Наклон кривых хорошо показывает чувствительность, эффект от движения по определенному показателю. В математике эту матрицу называют якобианом J, в которой роль наклона кривых играют значения производных Δ*Pi*/Δ*Rj*, см. рис. 10.9. (Напомним, что производная связана геометрически с углом наклона касательной к зависимости.)

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.9. Якобиан - матрица чувствительностей показателей в зависимости от изменения параметров СМО ] | |
| Рис. 10.9. Якобиан — матрица чувствительностей показателейв зависимости от изменения параметров СМО |

Если показателей 12, а параметров, например, 5, то матрица имеет размерность 12 x 5. Каждый элемент матрицы — кривая, зависимость *i*-го показателя от *j*-го параметра. Каждая точка кривой — среднее значение показателя на достаточно представительном отрезке *T*н или усреднено по нескольким экспериментам.

Следует понимать, что кривые снимались в предположении того, что все параметры кроме одного в процессе их снятия были неизменны. (Если бы все параметры меняли значения, то кривые были бы другими. Но так не делают, так как получится полная неразбериха и зависимостей не будет видно.)

Поэтому, если на основании рассмотрения снятых кривых принимается решение о том, что некоторый параметр будет в СМО изменен, то все кривые для новой точки, в которой опять будет исследоваться вопрос о том, какой параметр следует изменить, чтобы улучшить показатели, следует снимать заново.

Так шаг за шагом можно попытаться улучшить качество системы. Но пока эта методика не может ответить на ряд вопросов. Дело в том, что, во-первых, если кривые монотонно растут, то возникает вопрос, где же все-таки следует остановиться. Во-вторых, могут возникать противоречия, один показатель может улучшаться при изменении выбранного параметра, в то время как другой будет одновременно ухудшаться. В-третьих, ряд параметров сложно выразить численно, например, изменение дисциплины обслуживания, изменение направлений потоков, изменение топологии СМО. Поиск решения в двух последних случаях проводится с применением методов экспертизы и методами искусственного интеллекта.

Поэтому сейчас обсудим только первый вопрос. Как принять решение, каким должно быть все-таки значение параметра, если с его ростом показатель все время монотонно улучшается? Вряд ли значение бесконечности устроит инженера.

Параметр *R* — управление, это то, что находится в распоряжении владельца СМО (например, возможность заасфальтировать площадку и тем самым увеличить количество мест в очереди, поставить дополнительные каналы, увеличить поток заявок за счет увеличения затрат на рекламу и так далее). Меняя управление, можно влиять на значение показателя *P*, цель, критерий (вероятность отказов, пропускную способность, среднее время обслуживания и так далее). Из рис. 10.10 видно, что если увеличивать управление *R*, то можно добиться всегда улучшение показателя *P*. Но очевидно, что любое управление связано с затратами *Z*. И чем больше прилагают усилия для управления, чем больше значение управляющего параметра, тем больше затраты. Обычно затраты на управление растут линейно: *Z* = *C*1 · *R*. Хотя встречаются случаи, когда, например, в иерархических системах, они растут экспоненциально, иногда — обратно экспоненциально (скидки за опт) и так далее.

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.10. Зависимость показателя Р от управляемого параметра R (пример) ] | |
| Рис. 10.10. Зависимость показателя Рот управляемого параметра R (пример) |

В любом случае ясно, что когда-то вложение все новых затрат просто перестанет себя окупать. Например, эффект от заасфальтированной площадки размером в 1 км2 вряд ли окупит затраты владельца бензоколонки в Урюпинске, там просто не будет столько желающих заправиться бензином. Иными словами показатель *P* в сложных системах не может расти бесконечно. Рано или поздно его рост замедляется. А затраты *Z* растут (см. рис. 10.11).

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.11. Зависимости эффекта от применения показателя Р и затрат Z на его получение как функции управляемого параметра R ] | |
| Рис. 10.11. Зависимости эффекта от применения показателя Ри затрат Z на его получение как функции управляемого параметра R |

Из рис. 10.11 видно, что при назначении цены *C*1 за единицу затрат *R* и цены *C*2 за единицу показателя *P*, эти кривые можно сложить. Кривые складывают, если их требуется одновременно минимизировать или максимизировать. Если одна кривая подлежит максимизации, а другая минимизации, то следует найти их разность, например по точкам. Тогда результирующая кривая (см. рис. 10.12), учитывающая и эффект от управления и затраты на это, будет иметь экстремум. Значение параметра *R*, доставляющего экстремум функции, и есть решение задачи синтеза.

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.12. Суммарная зависимость эффекта от применения показателя Р и затрат Z на его получение как функции управляемого параметра R ] | |
| Рис. 10.12. Суммарная зависимость эффекта от применения показателя Ри затрат Z на его получение как функции управляемого параметра R |

Кроме управления *R* и показателя *P* в системах действует возмущение. Возмущения обозначим как *D* = {*d*1, *d*2, …}, см. рис. 10.13. Возмущение — это входное воздействие, которое, в отличие от управляющего параметра, не зависит от воли владельца системы. Например, низкие температуры на улице, конкуренция снижают, к сожалению, поток клиентов, поломки оборудования досадно снижают производительность системы. И управлять этими величинами непосредственно владелец системы не может. Обычно возмущение действует «назло» владельцу, снижая эффект *P* от управляющих усилий *R*. Это происходит потому, что, в общем случае, система создается для достижения целей, недостижимых самих по себе в природе. Человек, организуя систему, всегда надеется посредством ее достичь некоторой цели *P*. На это он затрачивает усилия *R*, идя наперекор природе. Система — организация доступных человеку, изученных им природных компонент для достижения некоторой новой цели, недостижимой ранее другими способами.

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.13. Условное обозначение изучаемой системы, на которую воздействуют управляющие воздействия R и возмущения D ] | |
| Рис. 10.13. Условное обозначение изучаемой системы, на которую воздействуют управляющие воздействия R и возмущения D |

Итак, если мы снимем зависимость показателя *P* от управления *R* еще раз (как показано на рис. 10.10), но в условиях появившегося возмущения *D*, то, возможно, характер кривой изменится. Скорее всего, показатель будет при одинаковых значениях управлений находиться ниже, так как возмущение носит «противный» характер, снижая показатели системы (см. рис. 10.14). **Система, предоставленная сама себе, без усилий управляющего характера, перестает обеспечивать цель, для достижения которой она была создана**. Если, как и ранее, построить зависимость затрат, соотнести ее с зависимостью показателя от параметра управления, то найденная точка экстремума сместится (см. рис. 10.15) по сравнению со случаем «возмущение = 0» (см. рис. 10.12).

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.14. Зависимость показателя P от управляющего параметра R при различных значениях действующих на систему возмущений D ] | |
| Рис. 10.14. Зависимость показателя P от управляющего параметра Rпри различных значениях действующих на систему возмущений D |

Если снова увеличить возмущение, то кривые изменятся (см. рис. 10.14) и, как следствие, снова изменится положение точки экстремума (см. рис. 10.15).

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.15. Нахождение точки экстремума на суммарной зависимости при различных значениях действующего возмущающего фактора D ] | |
| Рис. 10.15. Нахождение точки экстремума на суммарной зависимости при различных значениях действующего возмущающего фактора D |

В конечном итоге, все найденные положения точек экстремума переносятся на новый график, где образуют зависимость Показателя *P* от Управляющего параметра *R* при изменении Возмущений *D* (см. рис. 10.16).

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | [ Рис. 30.16. Зависимость показателя P от управляющего параметра R при изменении значений возмущений D (кривая состоит только из точек экстремумов) ] | |
| Рис. 10.16. Зависимость показателя P от управляющего параметра R при изменении значений возмущений D (кривая состоит только из точек экстремумов) |

Обратите внимание, что на самом деле на этом графике могут быть и другие рабочие точки (график пронизан как бы семействами кривых), но нанесенные нами точки задают такие координаты управляющего параметра, при которых при заданных возмущениях (!) достигается наибольшее из возможных значение показателя *P*.

Этот график (см. рис. 10.16) связывает Показатель *P*, Управление (ресурс) *R* и Возмущение *D* в сложных системах, указывая, как действовать наилучшим образом ЛПР (лицу, принимающему решение) в условиях возникших возмущений. Теперь пользователь может, зная реальную обстановку на объекте (значение возмущения), быстро по графику определить, какое управляющее воздействие на объект необходимо, чтобы обеспечить наилучшее значение интересующего его показателя.

Заметьте, если управляющее воздействие будет меньше оптимального, то суммарный эффект снизится, возникнет ситуация недополученной прибыли. Если управляющее воздействие будет больше оптимального, то эффект **также** снизится, так как заплатить за очередное увеличение управляющих усилий надо будет по величине больше, чем та, которую вы получите в результате ее использования (ситуация банкротства).

**Примечание**. В тексте лекции мы использовали слова «управление» и «ресурс», то есть считали, что *R* = *U*. Следует пояснить, что управление действительно играет роль некоторой ограниченной ценности для владельца системы. То есть всегда является ценным для него ресурсом, за который всегда приходится платить, и которого всегда не хватает. Действительно, если бы эта величина не была ограничена, то мы бы могли достигать за счет бесконечной величины управлений бесконечно больших значений целей, а вот бесконечно больших результатов в природе явно не наблюдается.

Иногда различают собственно управление *U* и ресурс *R*, называя ресурсом некоторый запас, то есть границу возможного значения управляющего воздействия. В этом случае понятия ресурс и управление не совпадают: *U* < *R*. Иногда различают предельное значение управления *U* ≤ *R* и интегральный ресурс ∫*Udt* ≤ *R*.