

ЗАДАНИЕ 1

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы – освоение принципов практического применения численных методов решения нелинейных уравнений. В работе рассматриваются методы бисекции и Ньютона.

2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Изучите теоретическую часть ([1, глава 4], п. 3 этого пособия). Задание допускается выполнять при помощи известного Вам языка программирования/математического пакета.

2. Оформите первую часть отчёта. Он должен содержать следующие пункты по каждой задаче:

- постановку задачи;
- исходные данные варианта;
- последовательность действий для решения задачи;
- результаты решения задачи;
- тексты программ, графический материал.

3 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

3.1 Постановка задачи решения нелинейных уравнений.

Требуется отыскать корни нелинейного уравнения с одним неизвестным вида

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

Корнем (или решением) уравнения (1) называется значение $\bar{x}$, при котором $f(\bar{x}) = 0$.

Корней уравнения (1) может быть несколько.



Корень $\bar{x}$ уравнения (1) называется **простым**, если $f'(\bar{x}) \neq 0$. Если же $f'(\bar{x}) = 0$, корень $\bar{x}$ называется **кратным**. Целое число m называется **кратностью корня $\bar{x}$** , если все производные $f^{(k)}(\bar{x}) = 0$ для $k = 1, 2, \dots, m-1$, и $f^{(m)}(\bar{x}) \neq 0$. Геометрически корень $\bar{x}$ соответствует пересечению графика функции $y = f(x)$ с осью Ox . Корень является простым, если график функции пересекает ось Ox под ненулевым углом, и кратным, если пересечение происходит под нулевым углом («касание»).

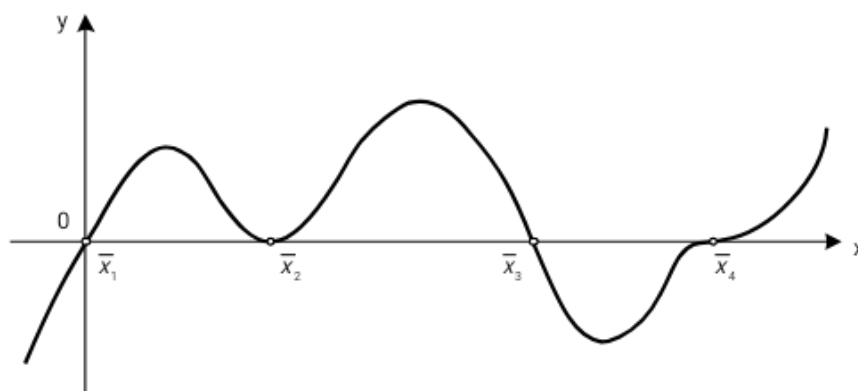


Рисунок 1

Так, функция, график которой изображен на рис. 1, имеет 4 корня, $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_3$ - простые, $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_4$ - кратные.

Нахождение точного решения уравнения (1) в виде конечной формулы или точного значения в общем случае, когда уравнение имеет степень n и некоторые дробные коэффициенты, не представляется возможным. В реальных условиях зависимость $y = f(x)$, описывающая некий процесс, является лишь приближенным законом. Поэтому любые точные корни будут лишь приближениями с некоторой точностью к истинным значениям корней.

В действительности решается задача отыскания приближенных значений корней с заданной точностью ε .

Решение такой задачи производится в **два этапа**:

1 Локализация корней. На этом этапе для каждого корня находят отрезок $[a, b]$ минимальной длины, содержащий только один корень. Для локализации корней уравнения (1) широко используется графический метод, либо метод построения таблиц значений функции вида $y_i = f(x_i)$ при подстановке некоторого количества значений x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. При табличном способе локализации (табулировании) о наличии корня на интервале $[x_{i-1}, x_i]$ судят по перемене знака функции на концах отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

2 Итерационное уточнение корней. На этом этапе применяется тот или иной метод итерационного уточнения для каждого из корней.

Итерационный метод называют **одношаговым**, если для вычисления следующего приближенного значения корня (x^{n+1}) используется только одно предыдущее приближение (x^n) , и **k-шаговым**, если для вычисления каждого следующего приближения используются k предыдущих $(x^{n-k+1}), (x^{n-k+2}), \dots, (x^n)$.

3.2 Метод бисекции

Пусть $[a, b]$ – отрезок локализации корня $\bar{x}$, а функция $y = f(x)$ непрерывна на этом отрезке и принимает на его концах значения разных знаков:

$$f(a) f(b) < 0.$$

Обозначим начальный интервал $[a, b] = [a^{(0)}, b^{(0)}]$. Разделим начальный интервал пополам точкой $x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$. Если $f(a^{(0)}) f(x^{(0)}) < 0$, следующим отрезком локализации корня выбирается $[a^{(1)}, b^{(1)}] = [a^{(0)}, x^{(0)}]$, иначе $[a^{(1)}, b^{(1)}] = [x^{(0)}, b^{(0)}]$.

Алгоритм вычисления $k + 1$ шага:

1) Вычисляется значение $f(x^{(k)})$, где $x^{(k)} = (a^{(k)} + b^{(k)}) / 2$

2) Если $f(a^{(k)}) f(x^{(k)}) < 0$, следующим отрезком локализации корня выбирается $[a^{(k+1)}, b^{(k+1)}] = [a^{(k)}, x^{(k)}]$, иначе $[a^{(k+1)}, b^{(k+1)}] = [x^{(k)}, b^{(k)}]$.

3) Новое значение $x^{(k+1)}$ рассчитывается как $x^{(k+1)} = (a^{(k+1)} + b^{(k+1)}) / 2$.

Критерий окончания

Если ε - заданная точность, и на некотором k -шаге выполняется

$$b^{(k)} - a^{(k)} \leq 2\varepsilon,$$

то $x^{(k)} = \frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}$ искомое приближение к корню $\bar{x}$ с точностью ε .

3.3 Метод Ньютона

Расчетная формула по методу Ньютона имеет вид

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}, \quad n \geq 0 \quad (2)$$

Критерий окончания

При заданной точности $\varepsilon > 0$ вычисления проводятся до тех пор, пока не окажется выполненным неравенство

$$|x^{(n)} - x^{(n-1)}| < \varepsilon \quad (3)$$

4 ЗАДАНИЕ

Задача 1. Варианты заданий представлены в таблице 1. Даны два уравнения $f(x)=0$ и $g(x)=0$. Найти с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$ все корни уравнений, содержащиеся на отрезке $[a, b]$. Для решения задачи использовать метод бисекции. Найти корни с помощью встроенной функции `root` пакета MATNCAD и сравнить полученные с помощью метода бисекции результаты.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.

1. Найти аналитическое решение уравнения $f(x)=0$.
2. Используя пакет MATNCAD, локализовать корни $f(x)=0$ графически.
3. Используя программу `bisec` (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А), найти корни уравнения $f(x)=0$ с точностью ε с помощью метода бисекции.

4. Используя встроенную функцию **root** пакета MATHCAD, найти корни уравнения $f(x)=0$ с точностью ε (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А).

5. Аналогично п. 1-4 попытаться найти корни уравнения $g(x)=0$. Объяснить полученные результаты.

Задача 2. Варианты заданий представлены в таблице 2. Требуется найти ближайший к точке $x=0$ корень уравнения $f(x)=0$ с точностью $\varepsilon=10^{-8}$ используя метод Ньютона. Фрагмент решения задачи представлен в ПРИЛОЖЕНИИ Б.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.

1. Используя пакет MATHCAD, построить график функции $f(x)$, выбрать начальное приближение x_0 для метода Ньютона.

2. Используя программу **Newton** (см. ПРИЛОЖЕНИЕ Б), найти корень уравнения $f(x)=0$ с точностью $\varepsilon=10^{-8}$.

3. Сравнить результат со встроенной в MATHCAD функцией **root**.

4. Если корень кратный, использовать модификацию метода Ньютона (программа **Newton_mod**) для случая кратного корня (см. ПРИЛОЖЕНИЕ В). По минимуму числа итераций при значениях $m=1,2,3,4,5$ определить кратность корня.

5. Аналогично п.4, использовать модификацию метода Ньютона (программа **Newton_mod**, ПРИЛОЖЕНИЕ В), и найти корень функции $g(x)$ из задачи №1. (начальное приближение для модифицированного метода Ньютона выбирается по графику $g(x)$). По минимуму числа итераций при значениях $m=1,2,3,4,5$ определить кратность корня.

Таблица 1 Варианты заданий к задаче 1

N	$f(x)$	$g(x)$	$[a, b]$
1.1	$(\sin x)^2 - \frac{5}{6}\sin x + \frac{1}{6}$	$(\sin x)^2 - \sin x + \frac{1}{4}$	$[0, 1]$
1.2	$(\sin x)^2 + \frac{7}{12}\sin x + \frac{1}{12}$	$(\sin x)^2 + \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{9}$	$[-1, 0]$
1.3	$(\sin x)^2 - \frac{1}{30}\sin x - \frac{1}{30}$	$(\sin x)^2 - \frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{25}$	$[-0.5, 0.5]$
1.4	$(\cos x)^2 + \frac{2}{35}\cos x - \frac{1}{35}$	$(\cos x)^2 - \frac{2}{7}\cos x + \frac{1}{49}$	$[0, 2]$
1.5	$(\cos x)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\right)\cos x + \frac{1}{4\sqrt{2}}$	$(\cos x)^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{2}$	$[0, 1.5]$
1.6	$(\cos x)^2 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{18}$	$(\cos x)^2 + \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{36}$	$[0, 2]$
1.7.	$(\ln x)^2 - 5\ln x + 6$	$(\ln x)^2 - 4\ln x + 4$	$[5, 25]$
1.8	$(\ln x)^2 - \ln x - 2$	$(\ln x)^2 + 2\ln x + 1$	$[0.1, 10]$
1.9	$(\ln x)^2 - \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{8}$	$(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{4}$	$[0.1, 2]$
1.10	$(\operatorname{tg} x)^2 + (\sqrt{3} - 1)\operatorname{tg} x - \sqrt{3}$	$(\operatorname{tg} x)^2 - 2\operatorname{tg} x + 1$	$[-1.2, 1]$
1.11	$(\operatorname{tg} x)^2 - \frac{28}{9}\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}$	$(\operatorname{tg} x)^2 - 6\operatorname{tg} x + 9$	$[0, 1.5]$
1.12	$(\operatorname{tg} x)^2 - \frac{53}{6}\operatorname{tg} x - \frac{3}{2}$	$(\operatorname{tg} x)^2 - \frac{1}{3}\operatorname{tg} x + \frac{1}{36}$	$[-0.5, 1.5]$
1.13	$x^4 - 7x^2 + 10$	$x^4 - 4x^2 + 4$	$[0, 3]$
1.14	$x^4 - \frac{10}{3}x^2 + 1$	$x^4 - 6x^2 + 9$	$[0, 2]$

1.15	$x^4 - \frac{13}{2}x^2 + 3$	$x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$	[0,3]
1.16	$(\sin x)^2 + \frac{5}{6}\sin x + \frac{1}{6}$	$(\sin x)^2 + \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{9}$	[-1, 0]

Окончание таблицы 1

N	$f(x)$	$g(x)$	[a, b]
1.17	$(\sin x)^2 - \frac{7}{12}\sin x + \frac{1}{12}$	$(\sin x)^2 - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{16}$	[0,1]
1.18	$(\sin x)^2 + \frac{1}{30}\sin x - \frac{1}{30}$	$(\sin x)^2 + \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{36}$	[-0.5, 0.5]
1.19	$(\cos x)^2 - \frac{2}{35}\cos x - \frac{1}{35}$	$(\cos x)^2 - \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{25}$	[0, 3]
1.20	$(\cos x)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right)\cos x - \frac{1}{4\sqrt{2}}$	$(\cos x)^2 - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{16}$	[0, 2]
1.21	$(\cos x)^2 - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{18}$	$(\cos x)^2 - \frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{9}$	[0, 2]
1.22	$(\lg x)^2 + \frac{5}{3}\lg x - \frac{2}{3}$	$(\lg x)^2 - \frac{2}{3}\lg x + \frac{1}{9}$	[0.001,3]
1.23	$(\lg x)^2 - \lg x - \frac{3}{4}$	$(\lg x)^2 - 3\lg x + \frac{9}{4}$	[0.1,35]
1.24	$(\lg x)^2 + \frac{3}{4}\lg x - \frac{1}{4}$	$(\lg x)^2 + 2\lg x + 1$	[0.01,3]
1.25	$(\operatorname{tg} x)^2 - (1 + \frac{1}{\sqrt{3}})\operatorname{tg} x + \frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\operatorname{tg} x)^2 - 2\operatorname{tg} x + 1$	[0,1]
1.26	$(\operatorname{tg} x)^2 - \frac{7}{4}\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}$	$(\operatorname{tg} x)^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{16}$	[-0.5,1.5]
1.27	$(\operatorname{tg} x)^2 + \frac{37}{6}\operatorname{tg} x + 1$	$(\operatorname{tg} x)^2 + 12\operatorname{tg} x + 36$	[-1.5,0]
1.28	$x^4 - 11x^2 + 24$	$x^4 - 6x^2 + 9$	[1,3]
1.29	$x^4 - \frac{26}{5}x^2 + 1$	$x^4 - 10x^2 + 25$	[0,3]

1.30	$x^4 - \frac{21}{2}x^2 + 5$	$x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$	[0,5]
------	-----------------------------	---------------------------	-------

Таблица 2 Варианты заданий к задаче 2

N	$f(x)$
2.1	$4 \arctg \left(\frac{x + \sqrt{2} - 1}{x + \sqrt{2} + 1} \right) - (4 - 2\sqrt{2})x + x^2 - 4\sqrt{2} + 5$
2.2	$800 \arctg \left(\frac{8x - 15}{10x + 16} \right) - 400x + 64x^2 + 525$
2.3	$8(\sqrt{2} - 1) \arctg x - \pi(\sqrt{2} - 1) - 2x(2\sqrt{2} - 1) + 7 - 4\sqrt{2} + x^2$
2.4	$36 \cos x + 18\sqrt{3}x + 9x^2 + \pi^2 - 18 - 6\sqrt{3}\pi - 6\pi x$
2.5	$144 \sin x + 12\sqrt{3}\pi + 36x^2 + \pi^2 - 72 - 12\pi x - 72\sqrt{3}x$
2.6	$32\sqrt{2} \sin x + 8\pi + 16x^2 + \pi^2 - 32 - 8\pi x - 32x$
2.7	$\operatorname{ctg} x + 2x + \pi x - 1 - \pi/2 - 2x^2 - \pi^2/8$
2.8	$\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 4\sqrt{3}x + 4\pi x - 3 - 2\pi/\sqrt{3} - 12x^2 - \pi^2/3$
2.9	$36 \sin x - 18\sqrt{3} + 9\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}\pi^2 - 18x - 6\sqrt{3}\pi x + 6\pi$
2.10	$36\sqrt{2} \cos x + 32x + 16x^2 + \pi^2 - 32 - 8\pi - 8\pi x$
2.11	$9 \operatorname{tg} x + 4(\pi - 3)x + 2\pi - \sqrt{3}(3 + 4x^2 + \pi^2/9)$
2.12	$6 \arcsin x + 24x - 12\sqrt{3}x^2 - 2\pi - 3\sqrt{3}$
2.13	$\operatorname{tg} x + \pi x - 2x^2 + 0.5\pi - 2x - 1 - \frac{\pi^2}{8}$
2.14	$48\sqrt{3} \cos x + 24\sqrt{3}x + 36x^2 - 4\pi\sqrt{3} - 12\pi x + \pi^2 - 72$
2.15	$144(2 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + 48\pi + 96(2 - \sqrt{3})\pi x - 144 - 576x - (2 - \sqrt{3})(576x^2 + 4\pi^2)$
2.16	$144(2 - \sqrt{3}) \operatorname{ctg} x - 48\pi + 96(2 + \sqrt{3})\pi x - 144 + 576x - (2 + \sqrt{3})(576x^2 + 4\pi^2)$

2.17	$16(3-2\sqrt{2})\sqrt{2}\operatorname{ctgx}+8\pi+16\sqrt{2}(4x+1)-32+16\pi x-\pi^2-64x^2-64x-8\sqrt{2}\pi$
2.18	$3\sqrt{3}\operatorname{ctgx}+4\sqrt{3}x+\frac{8\pi x}{3}-3-\frac{4\pi}{\sqrt{3}}-4x^2-\frac{4\pi^2}{9}$

Окончание таблицы 2

N	$f(x)$
2.19	$\sqrt{3}+\frac{\cos x}{9}\left(\pi\sqrt{3}-5\pi x-18-6\sqrt{3}x-15x^2-\frac{5\pi^2}{12}\right)$
2.20	$6\sqrt{3}\arcsin x-8x-4x^2-\pi\sqrt{3}+5$
2.21	$4\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-4x+x^2+3$
2.22	$800\operatorname{arctg}\left(\frac{4x-11}{5x+21}\right)-168x+16x^2+341$
2.23	$32\sqrt{2}\sin x+8\pi+16x^2+\pi^2-32-8\pi x-32x$
2.24	$\operatorname{ctgx}+2x+\pi x-1-\pi/2-2x^2-\pi^2/8$
2.25	$\sqrt{3}\operatorname{ctgx}+4\sqrt{3}x+4\pi x-3-2\pi/\sqrt{3}-12x^2-\pi^2/3$
2.26	$36\sin x-18\sqrt{3}+9\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}\pi^2-18x-6\sqrt{3}\pi x+6\pi$
2.27	$36\sqrt{2}\cos x+32x+16x^2+\pi^2-32-8\pi-8\pi x$
2.28	$9\operatorname{tg}x+4(\pi-3)x+2\pi-\sqrt{3}(3+4x^2+\pi^2/9)$
2.29	$6\arcsin x+24x-12\sqrt{3}x^2-2\pi-3\sqrt{3}$
2.30	$\sqrt{3}+\frac{\cos x}{9}\left(\pi\sqrt{3}-5\pi x-18-6\sqrt{3}x-15x^2-\frac{5\pi^2}{12}\right)$

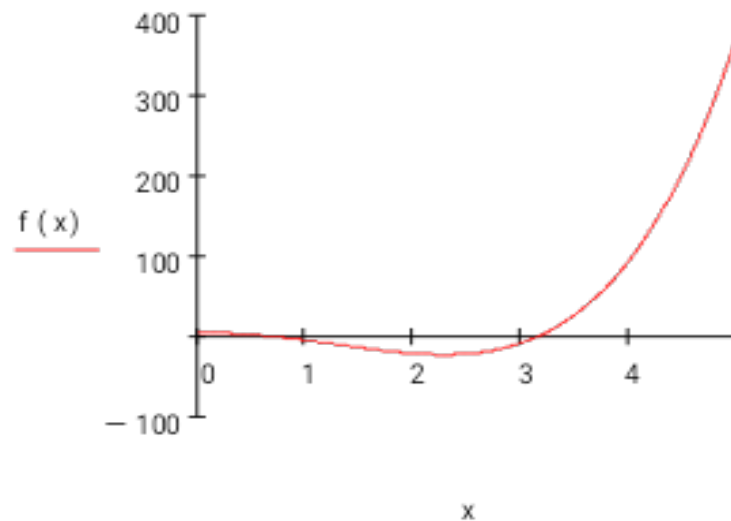
ПРИЛОЖЕНИЕ А

Фрагмент решения задачи 1.30 (Вариант 30)

$$f(x) = x^4 - \frac{21}{2}x^2 + 5, [a, b] = [0, 5].$$

1. Проведем локализацию корней, построив график заданной функции на интервале $[0, 5]$:

$$f(x) := x^4 - \frac{21}{2}x^2 + 5$$



Функция четная, имеет 4 корня. На заданном интервале $[0, 5]$ расположено только 2 из них. Отрезки локализации $[0.5, 1]$ и $[3, 3.5]$.

2. Зададим функцию, реализующую метод бисекции:

```

bisec ( f , a , b , ε ) :=
    an ← a
    bn ← b
    k ← 0
    while (bn - an) > 2·ε
        xn ← (an + bn) / 2
        fa ← f(an)
        fb ← f(bn)
        fxn ← f(xn)
        bn ← xn if fa · fxn ≤ 0
        an ← xn otherwise
        k ← k + 1
    xn ← (an + bn) / 2
    res ← (xn / k)
    res

```

3. Найдем первый корень:

$$\text{bisec}(f, 0.5, 1, 10^{-10}) = \begin{pmatrix} 0.707106781133916 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Функция **bisec** выводит значение корня и число итераций.

Решим уравнение встроенной функцией **root**:

$x0 := 0.5$ – задание начального приближения,

$$\text{root}(f(x0), x0) = 0.707106781171462$$

Результат отличается от вывода функции **bisec**, т. к. по умолчанию, погрешность расчета в MATHCAD равна $\varepsilon = 0.001$. Зададим ее $\varepsilon = 10^{-10}$:

$$\underline{\text{TOL}} := 10^{-10}$$

$$\text{root}(f(x0), x0) = 0.707106781186548$$

4. Аналогично, находим второй корень

$$\text{bisec}(f, 3, 3.5, 10^{-10}) = \begin{pmatrix} 3.162277660157997 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x0} := 3$$

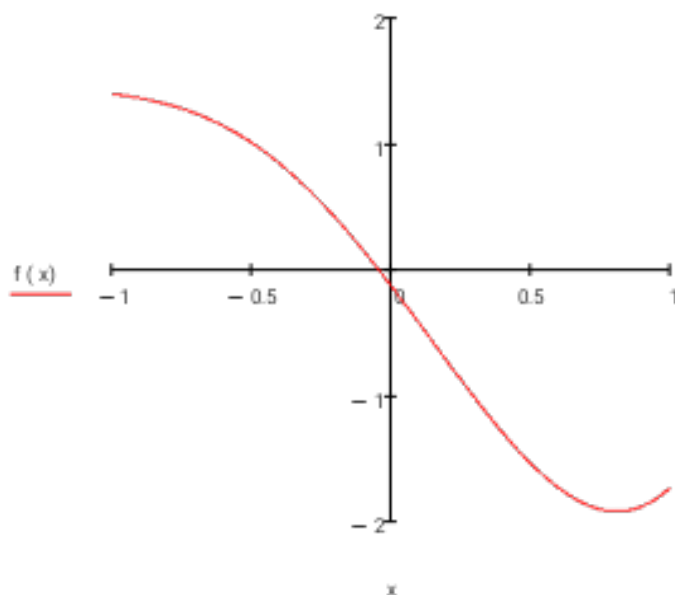
$$\text{root}(f(x0), x0) = 3.162277660168379$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Фрагмент решения задачи 2.30 (Вариант 30)

$$f(x) = \sqrt{3} + \frac{\cos x}{9} \left(\pi\sqrt{3} - 5\pi x - 18 - 6\sqrt{3}x - 15x^2 - \frac{5\pi^2}{12} \right)$$

1. Построим график функции в окрестности точки $x=0$:



2. Зададим функцию, реализующую метод Ньютона:

```

Newton (f, x0, ε) :=
  x_old ← x0
  x_new ← x_old -  $\frac{f(x_{old})}{\frac{d}{dx_{old}} f(x_{old})}$ 
  k ← 1
  while |x_new - x_old| > ε
    x_old ← x_new
    x_new ← x_old -  $\frac{f(x_{old})}{\frac{d}{dx_{old}} f(x_{old})}$ 
    k ← k + 1
  res ←  $\begin{pmatrix} x_{new} \\ k \end{pmatrix}$ 
  res

```

3. Найдем корень уравнения:

$$\text{Newton} (f, 0, 10^{-8}) = \begin{pmatrix} -0.041959579 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Начальное приближение $x_0 = 0$, число итераций 5. Из графика функции видно, что данный корень – простой. Применение модифицированного метода Ньютона не требуется.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Расчетная формула модифицированного метода Ньютона для поиска кратных корней

Модифицированный метод Ньютона для поиска кратных корней:

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,\dots, m=1,2,\dots$$

```

Newton_mod (f, x0, ε, m) :=
  x_old ← x0
  x_new ← x_old - m * (f(x_old) / (d/dx f(x_old)))
  k ← 1
  while |x_new - x_old| > ε
    x_old ← x_new
    x_new ← x_old - m * (f(x_old) / (d/dx f(x_old)))
    k ← k + 1
  res ← (x_new, k)
  res

```

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.